

舞野正観音堂奉納算額の調査

谷垣 美保^{*1}, 徳竹 亜紀子^{*1}

Survey Report of *SANGAKU* dedicated to Maino-Shokannon Temple

Miho TANIGAKI, Akiko TOKUTAKE

This paper is a survey report of *SANGAKU* transmitted to Maino-Shokannon temple in Taiwa-cho, Kurokawa-gun, Miyagi (*SANGAKU* is a wooden board dedicated to the temple and shrines with written math questions and answers). It was the 12 disciples of *WASAN* (old Japanese style mathematics) researcher Ryohei Sato who dedicated this *SANGAKU* to the temple in 1868. We surveyed this *SANGAKU* in August 2019, took pictures with digital camera and infrared camera, and checked the characters visually. In this paper, we will present the survey summary, consideration on some math questions, reprints, and infrared photo of figures.

KEYWORDS : *SANGAKU*, *WASAN*, Miyagi, Infrared photography, Seki-school, Kakujutsu, Enri, Fujita Sadasuke, Seiyo-Sampo, Series expansion, Approximation

1. はじめに

算額とは、和算家が自身の発見した数学の問題や解法を書いて、神社仏閣に奉納した額である。算額奉納は江戸時代後期から盛んにおこなわれるようになり、なかには西洋数学が一般化した昭和期に奉納された算額も確認されている。個人で奉納する場合もあれば、和算家の門人等が複数人で1枚の算額に各の算題を書き入れて奉納する場合もあった。その奉納者の階層も必ずしも武士階級以上に限られず、和算という学問文化が地域を構成する多様な人々に受容されていた様子がうかがわれる。日本の数学史や近世史の視点からみたとき、算額は、民間における学問・教養の在り方を知ることのできる貴重な歴史資料として興味深い存在である。

ところが、算額の奉納者が多様な人々であり、且つ各地の寺社に点在していることから、どこにどのような算額があるのかという基本的な所在状況の把握が困難であることが往々にしてある。これは算額を研究するうえで必ずといって良いほど立ちふさがり壁である。

そのなかにあって、宮城県の算額は、1960年代か

ら1970年代にかけて八巻寿亮氏を中心となって調査し、その成果を『宮城の算額』シリーズとして南部、北部、続、続々の4冊にまとめて刊行した^{1)~4)}。

『宮城の算額』シリーズでは、現存算額に限らず、逸失してしまった非現存算額についても和算書などから情報を集めて転載し、宮城県内に存在した過去・現在の算額の情報を網羅的に収集しており、およそ150点もの算額の情報が収められている。その後、現存する算額42点のみを収めた『宮城の和算』も刊行されている⁵⁾。

このように宮城県内の算額については、先学による調査がおこなわれ、その情報が共有されているのだが、『宮城の和算』刊行から30年以上を経て、当時の調査では確認されながら現在は所在不明になってしまった算額が少なくない。その一方、近年新たに発見される算額もあり、最新の所在情報の更新とその情報共有の手段が課題となっている。

以上のような状況を踏まえ、我々は算額の現状を把握するため、現地に赴いて所在の有無と保存状態の確認、及び文字情報の再確認調査を実施しているところである。

今回、我々は黒川郡大和町に所在する舞野正観音

^{*1} 総合工学科 (Dept. of General Engineering)

の堂内に保管されている算額を調査する機会を得た。この算額は、『宮城の算額』シリーズや『宮城の和算』に収載されず、2000年代に入ってようやく存在を知られるようになったばかりの新出算額である。本稿は、この算額の周知を図ることを第一義として位置づけ、調査概要、算題の内容に関する考察（第7問・第12問）、翻刻を發表することとした。そのため、数学史や歴史学における当該算額の意義を論じるには至らない内容となるが、それぞれの分野における研究推進の一助となれば幸いである。

2. 発見から調査までの経緯

舞野正観音堂の奉納算額が『宮城の算額』シリーズや『宮城の和算』に収載されていないことは前述のとおりである。しかし、これまで誰にもその存在を知られていなかったわけではなく、先学の成果を経た上に今回の調査が実現したものであるため、この調査にも立ち会っていただいた萬伸介氏の成果や証言を参考にしながら、これまでの経緯について述べておきたい。

まず、この算額は関流十二伝佐藤良平の門人12名が慶応4年（1868）に奉納したものである。同じ大和町内の吉岡八幡神社にも良平の門人5名が文久2年（1862）に算額を奉納している。萬氏の報告によれば、佐藤大作・良平父子は一ノ関藩浪士であったが、文久のころ仙台藩重役の但木家に抱えられ、多

くの子弟に算術を教授したという。はじめは吉岡の商人に教授し、次に舞野の農民に教授していたと考えられる⁹⁾。また、萬氏に教示いただいたところによると、舞野正観音堂を管理されている地元の方の話では、「地区の総代を務めた方々は算額があることは承知していたが、多くの地区民は知らなかったと思う」ということだから、算額が存在は、地元でも限られた範囲の人々でのみ共有されていたようである。

この算額が広く知られるようになるのは、2007年に大和町教育委員会が算額を確認したことに始まる。2008年、教育委員会より依頼を受けた土倉保氏が郷土史講座で「和算の楽しみ」と題する講演をおこない、そのなかで教育委員会が作成した翻刻資料を配付して算額を紹介した。この時点で舞野正観音奉納算額が存在は公になったと言えるが、主な講演対象が地元の住民だったこともあり、和算・算額研究者に広く周知されるには至らなかったであろう。

2017年、この算額が存在を知った萬伸介氏は大和町教育委員会に連絡をとって現地調査し、2018年8月に開催された第14回全国和算研究大会（於佐野市郷土博物館）において『宮城の和算』以降に新たに確認された宮城県内の算額5点のうちのひとつとして紹介し、発表資料の一部として修正版の翻刻を配付した¹⁰⁾。

このように、算額はこれまでに土倉氏の講演と萬氏の研究発表として二度紹介されており、翻刻も①

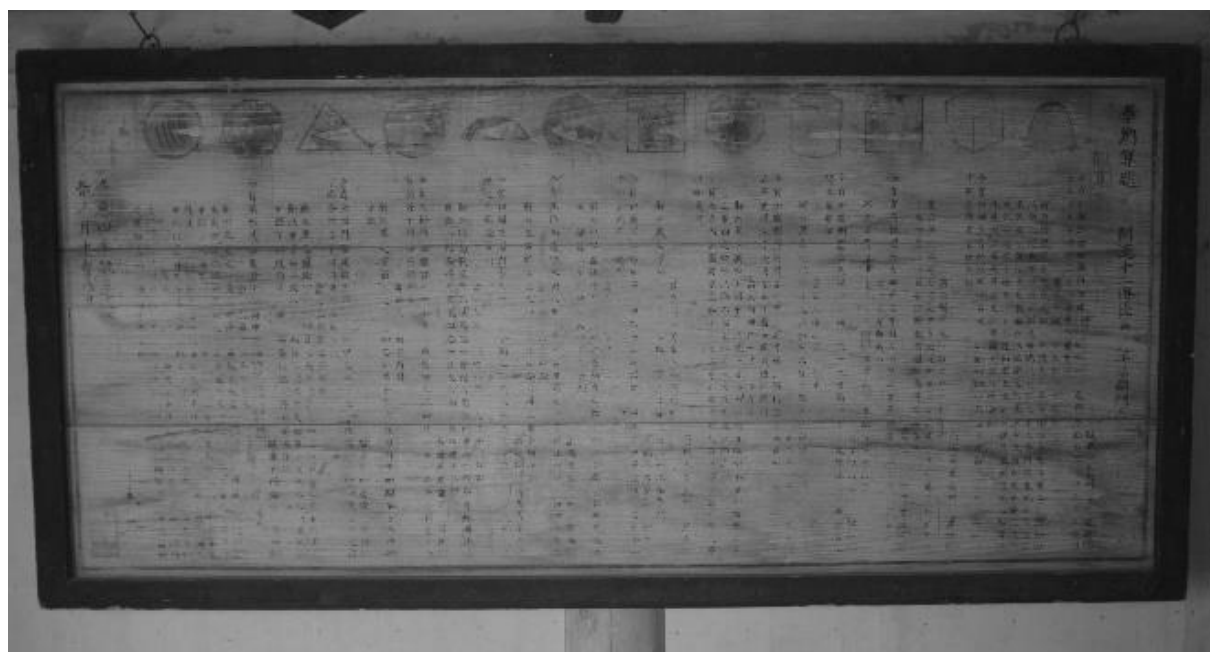


図1 算額の全体図（赤外線写真）

大和町教育委員会作成版、②萬伸介氏作成版の二種類存在する。しかし、①②いずれでも判読できなかった文字があり、赤外線カメラによる撮影の効果を期待して、我々の調査が実現した。その結果、赤外線カメラ撮影と目視による文字確認によって新たに判読できた文字があったこと、また、二度紹介されているとは言え、いずれもその場限りの配布資料であったことは否めず、いつでも参照可能な媒体での公開が望ましいと考え、本稿として発表することとした。萬氏には我々の調査にも同行していただき、同氏が作成した翻刻と対照させながら一緒に文字を再確認していただいた。後掲する翻刻には、大和町教育委員会や萬氏が作成した翻刻が前提として存在することを、ここでお断りしておく。

3. 調査概要

日 時 : 2019 年 8 月 29 日
調査地 : 宮城県黒川郡大和町落合舞野上舞野東
舞野正観音
参加者 : 谷垣美保, 徳竹亜紀子,
萬伸介 (調査協力)
調査対象 : 算額 1 点
年 代 : 慶応 4 年 (1868) 3 月 18 日
法 量 : 幅／外 188 (枠内 178)
高／外 90 (枠内 80)
厚／ 4 (本体板 2, 額 2)
界線幅・高／ 2
(単位: センチメートル)

算額は横長形の板材 3 枚を上下に並べ、板同士の接面を $\wedge$ 形に加工して重ねて本体板を成形している。接面を $\wedge$ 形に加工するのは、時間経過とともに板材が反るのを防ぐためである。額装されているように見えるが、額ではなく、本体板の表側に幅 5 センチメートルの外枠を打ち付けている。



图2 $\wedge$ 形加工

表側には、幅2センチメートルの界線を縦横に引いて方眼を作り、表題・年紀・図・割注を除く算題本文では方眼1マスに1文字を書き入れている。

算額は堂内壁に掛けられた状態で保管されており、概ね状態は良好である。ただし、下部になるほど墨痕が薄れて肉眼では文字を判読し難い箇所が散見する。そこで、通常のデジタルカメラによる撮影のほかに、赤外線カメラによる撮影をおこなうこととした。また、墨書された木材が風化する際の一般的な特徴であるが、墨が乗った文字部分だけ風化が遅れて、他所よりも盛り上がって残存する様子が見られたため、目視による文字の確認作業も並行しておこない、凹凸による陰影を利用した文字の判読を試みた。風化の進行具合から、算額は堂外に掲げられていた時期があったと推測される。

なお、この算額は慶応4年(1868)3月に奉納されたものだが、材の成形、界線ともにメートル法に基づいていると思われる。当時、メートル法は日本に紹介されていたものの、度量衡の基本は尺貫法であったことを考慮すると、興味深いことである。

術云立天元一為角中徑列角數自乘之

九
三百一十二萬六千八百九十口段

內減
五百口十四萬五千五百口十八個

余乘角中徑以減角數再乘幕与角面相乘

房
四十萬七千六百六十段

余乘角數二乘幕寄

甲位○列角數

心
三萬四千一百一十九段

內減
二十口萬四千一百口十六個

余乘角數加

箕
口口口口萬五千一百八十五個

乘角數

內減

斗
三十八萬五千四百二十四個

余乘角面內角數与角中徑相乘

牛
七十九萬口

寄乙位○加入

甲位以減角數幕与角中徑相乘

女
二百七十五萬一千八百九十八段

余寄丙位○列角數幕

百二

虛
三十二萬四千五百六十口段

內減

危
六十萬口二千四百口一個

余乘角中徑加乙位內減甲徑余以

加
減
丙

位

六角以下者以減
七角以上者加之

得數寄左○列角中徑

室
五十口分七千七百六十九段

与寄左相消得歸除

式実如法而一得角中徑合問

図3 額尾の算題の術文

4. 考察

4. 1 額尾の算題の検討

算額では額尾の算題を1番の実力者、額頭の算題を2番目の実力者が奉納するのが慣例であった。ここでは額尾の「相澤平内祐信 謹撰」の算題に着目する。この算題の術文には図3のように小さな文字で2列に書かれた数値が12箇所あり、この部分が特に判読し難いので、順に亢、氏、房、心、尾、箕、斗、牛、女、虚、危、室とおき、その特定を含め数学的に検討する。意識は次のようになる。

(問題) 正多角形がある。その角の数が与えられているとき、角中径(外接円の半径)の値を求める計算式を、正3角形から何万角形でも通用する、角中径についての帰除式(1次方程式)の形で答えよ。図は仮に正8角形を描いたものである。

(答) 角中径を求める式は術文のとおりである。

(術文) 正多角形の1辺の長さを a 、角数を n とおき、求める角中径を R とおく。

$$\{房an^3 - (亢n^2 - 氏)R\}n^4 = 甲 \quad (1)$$

$$\{[(心n - 尾)n + 箕]n - 斗\}a + 牛nR = 乙 \quad (2)$$

$$女n^2R - (乙 + 甲) = 丙 \quad (3)$$

とおき

$$丙 \pm \{(虚n^2 - 危)R + 乙 - 甲\} \quad (4)$$

を考える。ここで複号は、 $3 \leq n \leq 6$ のときは $-$ 、 $n \geq 7$ のときは $+$ とする。(4)が室 R と相等しいとすれば R についての1次方程式となり、これを解けば R が得られ、間に合う。 //

術文の式から甲、乙、丙を消去して角中径率 R/a について解くと、 $3 \leq n \leq 6$ のとき

$$\begin{aligned} R/a &= (心n^3 - 尾n^2 + 箕n - 斗) \\ &\div \left(\frac{女 - 虚}{2}n^2 - 牛n + \frac{危 - 室}{2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$n \geq 7$ のときは

$$\begin{aligned} R/a &= 房n^7 \\ &\div \left(亢n^6 - 氏n^4 + \frac{女 + 虚}{2}n^2 - \frac{危 + 室}{2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

となる。術文とは、現代数学のように解法を説明し

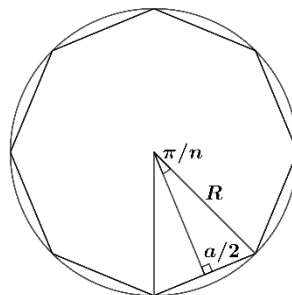


図4 正多角形とその外接円

たものではなく、条件の数値を代入すれば答の数値が得られる式を何らかの方法で求め、その式を整理したものである。祐信もまず(5),(6)を求め、それを変形して術文を作ったと考えられる。

図4より、三角関数を用いてこの問題に答えれば次のようになる。

$$\frac{R}{a} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \quad (7)$$

角中径率に関しては以下の研究が見られる^{9)~15)}。村松茂清は『算俎』(寛文3/1663)二巻で n が3以上16以下の場合について R/a を求めたが、「弧矢弦の術」という近似式に基づくため、精密でなかった。関孝和は天和3年(1683)、 R/a を解にもつ既約方程式を $3 \leq n \leq 20$ の場合に導き(表1参照)数値的に解いた。これは遺編『括要算法』(正徳2/1712)利巻で発表された。建部賢弘は1700年頃に完成した『大成算経』十一巻で孝和の理論を発展させ、 R/a が満たす既約方程式の次数に関する法則を一般的に求めている。松永良弼は関連研究が多く、『算法全経(廉術)』では R/a が満たす方程式を一般の n について求めた。また『方円算経』(元文4/1739)では R/a を無限級数で表し、

$$\frac{R}{a} = \frac{n}{2\pi} \left\{ 1 + B_1 \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 + \frac{2^3 - 1}{3 \cdot 4} B_2 \left(\frac{\pi}{n} \right)^4 + \dots \right\} \quad (8)$$

(ここで B_i は関-Bernoulli数)や

$$\begin{aligned} \frac{a}{R} &= \frac{6}{n} \left\{ 1 + \frac{1}{4 \cdot 6} \left(1 - \frac{6^2}{n^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \left(1 - \frac{6^2}{n^2} \right) \left(9 - \frac{6^2}{n^2} \right) + \dots \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

を得た。(7)より、(8)は $\operatorname{cosec} x$ のMaclaurin展開であり、Eulerが1755年に発表するより良弼のほうが早く求めていたことになる。(9)については、良弼と交流のあった久留島義太の作ともいわれる。

方円算経には、その他様々な級数が登場する。図5のように円の直径を d 、弦を a 、対応する弧を s

表 1 角中径率が満たす方程式の例

n	$x = R/a$ が満たす方程式
17	$17x^{16} - 204x^{14} + 714x^{12} - 1122x^{10} + 935x^8 - 442x^6 + 119x^4 - 17x^2 + 1 = 0$
18	$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$
19	$19x^{18} - 285x^{16} + 1254x^{14} - 2508x^{12} + 2717x^{10} - 1729x^8 + 665x^6 - 152x^4 + 19x^2 - 1 = 0$
20	$x^8 - 12x^6 + 19x^4 - 8x^2 + 1 = 0$

とおいたとき

$$a = s \left\{ 1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{s}{d} \right)^2 + \frac{1}{5!} \left(\frac{s}{d} \right)^4 - \frac{1}{7!} \left(\frac{s}{d} \right)^6 + \dots \right\} \quad (10)$$

が成り立つことは, 鎌田俊清の『宅間流円理』(享保 7/1722) で述べられているが, 方円算経にも見られる。図 5 のように中心角を 2θ とすると $a = d \sin \theta$, $s = d\theta$ であるから(10)は $\sin \theta$ の Maclaurin 展開

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 - \frac{1}{7!} \theta^7 + \dots \quad (11)$$

に相当する。

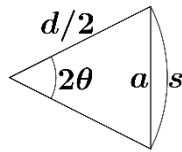


図 5 公式(10)で使用了文字の定義

角中径率 R/a の値は孝和や良弼が求めた方程式から計算できるけれども, n 毎に高次方程式を解かなければならない。良弼が求めた R/a の無限級数表示(8),(9)も, 値を求めるには実用的でない。入唐昌は『角総算法』(寛保 3/1743) において, R の近似

図 6 精要算法 (東北大学附属図書館蔵)

値を与える 7 次方程式を提案した。これを機に近似式が研究されるようになり, 良弼は『方円雑算』, 山路主住は『角中径捷術伝』において, R^2/a^2 の近似値を与える 1 次方程式を考案した。

藤田定資は『精要算法』(天明元/1781) 下巻の最後で, R/a の近似値を直接与える 1 次方程式を求める問題を出した (図 6)。舞野正観音堂算額の額尾の算題は, ここから取られたものと推測されるが, 精要算法と算額では術文がやや異なる。精要算法の術文から R/a を求めると, $3 \leq n \leq 6$ のとき

$$R/a = \frac{(34519n^3 - 134136n^2 + 105785n - 285414)}{(213669n^2 - 790401n + 26826)} \quad (12)$$

$n \geq 7$ のとき

$$R/a = \frac{497660n^7}{(3126890n^6 - 5143528n^4 + 6n^3 + 2538085n^2 + 1146n - 597619)} \quad (13)$$

となる¹⁶⁾。この近似式に対し会田安明は『算法古今通覧』(寛政 9/1797) の三巻の中で, 「角総算法の近似式に比べれば次数が低く誤差も小さく優れているが, 真の一般公式ではない」と評し, 真の公式として(9)を同六巻で紹介している。しかし結局会田は(9)の第 16 項までの部分和を補正せず用いて R/a の近似値を求めているため, 大変な計算の割に精度が怪しく, 簡単な計算で良い近似値を出す方法を問うた, 定資の問に対する答としては不適切である。

$3 \leq n \leq 6$ について, 算額の近似式(5)は精要算法の近似式(12)と形が同じであり, 図 3 で(5)の係数心・尾・箕・斗・牛の値を見ると, (12)の係数とほぼ一致しているから(5)は(12)と同じ式と考えられる。よって心・尾・箕・斗・牛の値が確定し, また

$$\frac{\text{女} - \text{虚}}{2} = 213669, \quad \frac{\text{危} - \text{室}}{2} = 26826 \quad (14)$$

であることがわかる。女の千の位と虚の一の位, 危の千の位と一の位は算額から読み取れないが, 読み取れる部分と(14)を考え合わせると

$$\begin{aligned} \text{女} &= 2751898, & \text{虚} &= 2324560 \\ \text{室} &= 567769, & \text{危} &= 621421 \end{aligned} \quad (15)$$

であることが推測できる。

$n \geq 7$ について, 算額の近似式(6)は精要算法の近似式(13)と異なり, 分母に 3 次や 1 次の項がない。

表2 図3の数値部分の推定値

牛	斗	箕	尾	心
四百〇一段 七十九万〇	四百一十四個 二十八万五千	七百八十五個 一十〇万五千	一百三十六個 一十三万四千	百一十九段 三万四千五
室	危	虚	女	
七百六十九段 五十六万七千	四百二十一個 六十二万二千	千五百六十〇段 二百三十二万四	千八百九十八段 二百七十五万	
房	氏	亢		
六百六十八段 四十九万七千	千五百〇十八個 五百一十四万三	千八百九十〇段 三百一十二万六		

しかし図3で(6)の分子の係数房や、分母の6次の係数亢、4次の係数氏の値を見ると、(13)の対応する係数とほぼ一致している。そこでこれらの値は同じであると考え、房・亢・氏の値を定める。

以上より算額は表2のように書かれていたことが明らかになった。(直前の文字に掛ける数には「段」、定数項には「個」がつく。)一・二・三のように横棒しかない数字は、額の板の木目と紛れて特に判別し難いが、幸い精要算法からの出題であったために、未知数をすべて特定することができた。

さて、(15)より(6)の未知係数について

$$\frac{\text{女} + \text{虚}}{2} = 2538229, \quad \frac{\text{危} + \text{室}}{2} = 594595$$

と計算できるから、精要算法の近似式(13)とは異なる、未知の近似式(6)も次のように確定した。

$$R/a = 497660 n^7 \\ \div (3126890 n^6 - 5143528 n^4 \\ + 2538229 n^2 - 594595) \quad (16)$$

近似式(12),(13),(16)は、どのような方法で得られたのだろうか。今年度の東北地区和算研究交流会で発表した時点では「(12)は R/a の値を分数近似し、その値をとる分数式を、連立方程式を解いて求めただけであるが、(13),(16)は $\sin \theta$ の Maclaurin 展開の部分項を基に作った式である」という概略までは推測できたが、当時 $\sin \theta$ の Maclaurin 展開がどのような形で知られていたのか、および具体的にどのような計算によって(13)と(16)が得られたのか、わからな

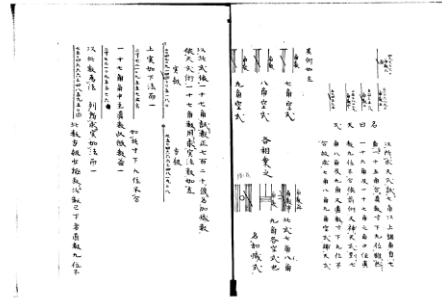


図7 新法阪除角術（東北大学附属図書館蔵）

かった。しかしその後の文献調査により、定資自身がこの問題を解説した書『新法阪除角術』が存在することを知った。それを解読したところ、祐信のオリジナルかと思われた(16)は、(13)の導出過程で定資が既に得ていたことがわかった。以下、新法阪除角術を参考に(12),(13),(16)の導出を簡単に紹介する。

まず $3 \leq n \leq 20$ について、なるべく正確な R/a の値を用意する。これは中国から伝わっていた数値解法（現代でいう Horner 法）により孝和の方程式を解けば、必要な精度まで求めることができる。

表3 (12)の基になった R/a の近似分数

n	R/a の真の値とその近似分数
3	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \frac{40545}{70226}$
4	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{33461}{47321}$
5	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \approx \frac{200831}{236091}$

$n = 6$ のとき $R/a = 1$ であるが、その他のときは無理数である。和算では零約術といって、無理数の分数近似がよく行われた。 $3 \leq n \leq 5$ について、表3のように R/a を近似する分数を作る。 $n = 6$ のときは1、 $3 \leq n \leq 5$ のときはそれぞれ表3の分数を R/a がとるとすれば、 $3 \leq n \leq 6$ のとき

$$\begin{aligned} (40545a - 70226R)(n-4)(n-5)(n-6) &= 0 \\ (33461a - 47321R)(n-3)(n-5)(n-6) &= 0 \\ (200831a - 236091R)(n-3)(n-4)(n-6) &= 0 \\ (a - R)(n-3)(n-4)(n-5) &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。この4つの式を、 $n^3 R$ の係数が消えるように線形結合して

$$-(34519n^3 - 134136n^2 + 105785n - 285414)a \\ + (213669n^2 - 790401n + 26826)R = 0 \quad (17)$$

を得、 R/a について解けば(12)の形になる。表4に

表4 近似式による計算値と真の値との誤差

n	(12)の値 - (7)の値
3	-5.853×10^{-11}
4	1.579×10^{-10}
5	2.270×10^{-11}
6	0

n	(13)の値 - (7)の値	(16)の値 - (7)の値
7	2.866×10^{-10}	
8	-1.722×10^{-10}	
9	-8.130×10^{-11}	
10	3.773×10^{-11}	5.667×10^{-11}
13	1.553×10^{-10}	2.559×10^{-10}
15	1.410×10^{-10}	2.781×10^{-10}
35	9.619×10^{-13}	1.156×10^{-10}
52	-3.204×10^{-11}	3.643×10^{-11}
53	-3.376×10^{-11}	3.283×10^{-11}
63	-5.075×10^{-11}	4.707×10^{-13}
100	-1.125×10^{-10}	-8.875×10^{-11}
200	-2.726×10^{-10}	-2.658×10^{-10}
600	-8.769×10^{-10}	-8.761×10^{-10}

おける $3 \leq n \leq 5$ のときの誤差は, 表3における真の値と近似分数の誤差である。

$n \geq 7$ のとき, 現代的に言えば $\sin \theta$ の Maclaurin 展開(11)を用いているのであるが, 当時はそのような言葉はない。定資は, 師である山路主住の『弧背詳解』(宝暦9/1759)から公式(10)を引用している(図8)。弧背詳解は, 賢弘や良弼の研究成果を主住が戸板保佑に教えた書といわれ, 保佑が安永9年(1780)に編纂した『関算四伝書』前伝に含まれている。

まず(正七角形を念頭に)中心角 $2\pi/7$ の扇形について, 直径 d , 弦 a , 弧 s の比を求めておく。仮に(10)の6次までの部分和を a の近似式として

$$a = s \left\{ 1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{s}{d} \right)^2 + \frac{1}{5!} \left(\frac{s}{d} \right)^4 - \frac{1}{7!} \left(\frac{s}{d} \right)^6 \right\} \quad (18)$$

とする。求めておいた s, d を右辺に代入し, 求めておいた a の値と比べると小数第9位が合わない。そこで(18)の最後の項の $7!$ ($= 120 \cdot 42$) を補正して, 次のようにすれば小数第10位まで合う。

$$a = s \left\{ 1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{s}{d} \right)^2 + \frac{1}{5!} \left(\frac{s}{d} \right)^4 - \frac{1}{120 \cdot 42.118} \left(\frac{s}{d} \right)^6 \right\}$$

こうして得られた近似公式を, 角中径に適用する。正 n 角形の辺 a は, 直径 $2R$, 中心角 $2\pi/n$ の扇形の弦であるから(図4,5), $d = 2R$, $s = 2\pi R/n$ を

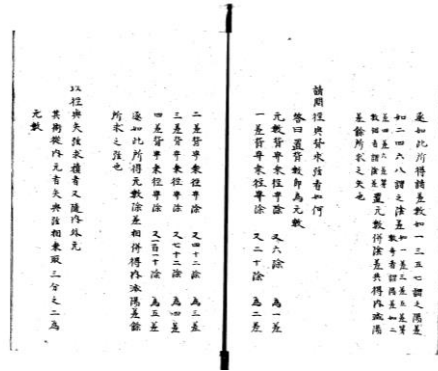


図8 弧背詳解(東北大学附属図書館蔵)

上の式に代入すれば, 角中径率に関する近似式

$$a = \frac{2\pi R}{n} \left\{ 1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{n} \right)^4 - \frac{1}{120 \cdot 42.118} \left(\frac{\pi}{n} \right)^6 \right\}$$

を得ることができた。

係数に π が含まれていては計算しにくいので, 2π を分数で近似して $312689/49766$ とし, 両辺に $49766 n^7$ を掛けて移項すると

$$-49766 n^7 a + 312689 \left\{ n^6 - \frac{\pi^2}{6} n^4 + \frac{(\pi^2)^2}{120} n^2 - \frac{(\pi^2)^3}{120 \cdot 42.118} \right\} R = 0$$

この π^2 に近似値 9.86960440109 を代入し, 10 倍して小数点以下を四捨五入すると次が得られる。

$$-497660 n^7 a + (3126890 n^6 - 5143528 n^4 + 2538229 n^2 - 594789) R = 0$$

これによって $7 \leq n \leq 9$ の場合に R/a を計算してみる。最初に求めておいた値と比べるとやや誤差があるので, 定資は最後の項を補正して, 次の式を作った(図7右上の「天式」)。

$$-497660 n^7 a + (3126890 n^6 - 5143528 n^4 + 2538229 n^2 - 594595) R = 0 \quad (19)$$

これが舞野正観音堂算額の近似式(16)である。これによって $7 \leq n \leq 20$ の場合に R/a を計算し, 最初に求めておいた値と比べると(真の値との誤差は表4下右列)。 $n = 7$ のときに比べれば, $10 \leq n \leq 20$ でも誤差は小さいと思うが, 定資は大きいと判断してさらに補正することにした。

しかし先程のように最後の項だけを調整すると, 今度は $7 \leq n \leq 9$ のときの近似が悪くなると定資は考え, 値を変えぬよう $(n-7)(n-8)(n-9)$ の倍数を R の係数に加える方法で補正した。6 倍を

加えたものが

$$-497660n^7a + (3126890n^6 - 5143528n^4 + 6n^3 + 2538085n^2 + 1146n - 597619)R = 0$$

であり、これが精要算法の近似式(13)である。真の値との誤差は、表4の下左列である。精要算法・新法版除角術には $n = 20$ までしか数値が載っていないが、 $n > 20$ でも計算して確認したようである。

(13)と(16)の精度を比べると、 $10 \leq n \leq 52$ のときは(13)が良く、 $n = 35$ のとき最も誤差が小さい。対して $n \geq 53$ のときは(16)のほうが良く、 $n = 63$ のとき最も誤差が小さい。

定資は精要算法の上中巻に「用の用」(実用的なもの)を載せたとし、実際問題を例に関流の諸術をわかりやすく解説した。角中径の問題が載っている下巻は「無用の用」(学んでおくくと有益なもの)を載せた巻で、上中巻ほど実用的ではないが、それでも実用性の観点から、 n が比較的小さいときの精度を重視し、(16)を(13)のように補正したと推察される。

一方相澤平内祐信は、佐藤良平祐嗣の指導のもと定資の解法を勉強し、計算量の少ない(16)のほうが、 n が大きいとき高精度であることに気づいたのであろう。50角、60角と計算して精度を比べたのか、それとも、(16)は分母に奇数次の項がなく Maclaurin 展開の形を保っていることから推論したのかはわからない。いずれにせよ祐信は、定資が破棄した(16)のほうを最終的な答にすべきと考え、これを基に術文を作成し、地域の人が集う舞野正観音堂に奉納して研究成果を発表したのだと想像される。

(12)と(16)を基に術文を作るには、例えば以下のようになればよい¹¹⁾。 R/a について解く前の(17)と(19)の形で考えて左辺を比べ、共通に現れる n^2R と R の項を除いた部分を(1),(2)のように甲、乙と定める(漢文での表しやすさのためか、和算では展開された形でなく、(1),(2)のように括弧が何重にもなる形が用いられる)。すると近似式は $n \geq 7$ のとき

$$-甲 + (2538229n^2 - 594595)R = 0 \quad (20)$$

$n \leq 6$ のとき

$$-乙 + (213669n^2 + 26826)R = 0 \quad (21)$$

と表せる。(20)と(21)の左辺の和を丁とおき、差を戊とおいて(15)の記号を用いると

$$丁 = -甲 - 乙 + (女n^2 - 室)R$$

$$戊 = -甲 + 乙 + (虚n^2 - 危)R$$

である。これを用いれば、丁 + 戊は(20)の左辺の倍

であるから $n \geq 7$ のとき 0 になり、丁 - 戊は(21)の左辺の倍であるから $n \leq 6$ のとき 0 になる。ゆえに術文として「丁 ± 戊 = 0、複号は $n \leq 6$ のとき -、 $n \geq 7$ のとき + とする」と表現できる。

和算では「A 寄左 B 寄左相消」という言い方で「 $A - B = 0$ 」を表現したので、丁のうち「室 R 」の項を B の部分として残しておき、残りを(3)のように丙と定めれば、「丁 ± 戊 = 0」は

$$(丙 - 室R) \pm \{(虚n^2 - 危)R + 乙 - 甲\} = 0$$

のことであるから「(4)寄左 室 R 寄左相消」ということになる。これが祐信の術文である。

なお、額頭の「相澤治左衛門祐貞 謹撰」の算題は定資著の『神壁算法』(寛政元/1789)に見られる。この算題については別の機会に検討したい。

4. 2 第七問の検討

算額にはミスが見られることがあり、出題者が本当はどのように書きたかったのか、推測して修正することは大変面白い研究テーマである。ここでは、舞野正観音堂算額の第七問「高橋桑兵衛則之 謹撰」の算題の答が誤りであると思われることを紹介したい。問題と答の意識は次のようになる。

(問題) 図のように、円の内に甲円1つと乙円2つと丙円1つが接するようにある。ここで甲円の直径を4寸、乙円の直径を1寸4分とすると、円の直径はいくらか。

(答) 円の直径は7寸である。

図内に文字は見られないが、問題文から図9のような位置関係であると推定できる。求める円を大円とし、下部で大円を横切る円を外円とした。以下、

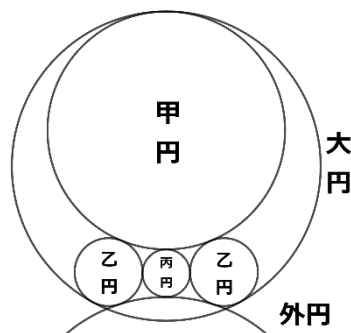


図9 甲 = 7, 乙 = 2, 丙 = 1.4, 大 = 外 = 9.1 の図

円の名前で直径も表すものとする。当時と同様に座標を用いずに考えよう。算額作成に活用されていた数学公式集、長谷川弘闊・山本賀前の『算法助術』(天保12/1841)¹⁷⁾の二十三から

$$\text{丙}^2(\text{甲} + \text{乙} + \text{丙} + \text{外}) = \text{甲外}(\text{乙} - \text{丙})$$

が成り立つ。また二十四から、

$$\text{甲}^2(\text{甲} + \text{乙} + \text{丙} - \text{大}) = \text{丙大}(\text{甲} - \text{乙})$$

が成り立つことがいえる。則之は甲=4, 乙=1.4を与えて答を大=7としているが、これはおかしい。なぜなら、丙について解くと

$$\text{丙} = \frac{\text{甲}^2(\text{大} - \text{甲} - \text{乙})}{\text{甲}^2 - \text{甲大} + \text{乙大}}$$

であるから、丙が正になるためには

$$\frac{\text{甲}(\text{大} - \text{甲})}{\text{大}} < \text{乙} < \text{大} - \text{甲}$$

でなければならず、甲=4, 乙=1.4, 大=7は左側の不等式をみたさないからである。そこで、どのように数値を直せばよいか考える。甲と乙の値だけでは大が定まらないが、算額の図(後掲の赤外線写真を参照)を見ると大円と外円が同じ大きさに見えるので、大=外とする(和算では、条件が問題文中に書かれず、図から読み取らねばならないことがしばしばある)。この仮定のもと大(外)を消去して甲・乙・丙の関係式を求めると、丙についての2次方程式

$$(\text{甲} - \text{乙})\text{丙}^2 + \text{甲}(\text{甲} + \text{乙})\text{丙} - \text{甲}^2\text{乙} = 0$$

が得られる。和算における2次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の解の公式は、分子を有理化した

$$x = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

の形であった。これを用いて

$$\text{丙} = \frac{2\text{甲乙}}{\text{甲} + \text{乙} + \sqrt{\text{甲}^2 + 6\text{甲乙} - 3\text{乙}^2}}$$

が得られる。この式により丙を消去して大を甲・乙で表すと、途中計算は省略するが

$$\text{大} = \frac{2\text{甲}(2\text{甲}^2 + 2\text{甲乙} + \text{乙}^2)}{4\text{甲}^2 - \text{甲乙} - \text{乙}^2 + \text{乙}\sqrt{\text{甲}^2 + 6\text{甲乙} - 3\text{乙}^2}}$$

が得られる(図や和算の慣習から 甲 > 乙 であると

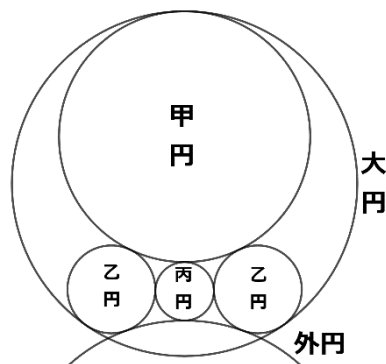


図10 与えられた条件で解いた場合の図

思われるが, $2\text{甲} > \text{乙}$ であれば丙・大とも正の実数になる)。条件どおり 甲=4, 乙=1.4 とすると

$$\text{丙} = \frac{56}{27 + \sqrt{1093}}, \quad \text{大} = \frac{9032}{1411 + 7\sqrt{1093}}$$

となり、算額の図と比べ甲円が大き過ぎる印象である(図10)。算額においては実際の答が図の印象と異なることは珍しくないが、答がきれいな値になるように条件の値を調整することが普通であるから、 $\sqrt{1093}$ が含まれる答になるのは、条件の値を書き誤ったものと考えられる。

では、本当はどのような条件値であったのだろうか。例えば甲を四寸二分、乙を二寸四分とすれば、丙が一寸四分、大が七寸というようにすべて有理数になり、この比で図を描くと算額の図とも近い印象になる(図11)。したがって、本当は「甲円径四寸二分乙円径二寸四分」と書くべきところを、甲円径の「二分」を落とし、乙円径の「二寸」を(丙円径につられたのか)「一寸」と書いてしまったのではないだろうか。

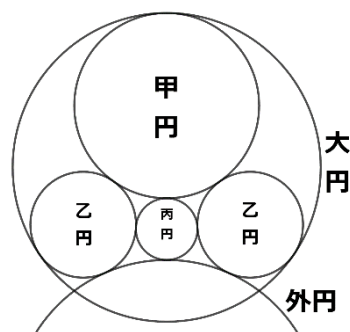


図11 甲=4.2, 乙=2.4, 丙=1.4, 大=外=7 の図

大和町のような身近な地域で、150年前の人々がどのような教科書や公式集を読んで数学を学び、ど

のような問題に魅了されて取り組み、どのような発見をして喜び、発表していたのか。算額は、当時の人々の高揚感までも迫体験させてくれる、貴重な歴史資料である。本稿が、その面白さを伝える一助となれば幸いである。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP19K12709 の助成を受けたものであることを記し、謝意を表する。

参考文献

- 1) 平山諦・八巻寿亮：宮城の算額 南部，謄写版(1967)
- 2) 平山諦・八巻寿亮・生駒利夫：宮城の算額 北部，謄写版(1968)
- 3) 八巻寿亮・平山諦・生駒利夫：宮城の算額 続・補遺，謄写版(1971)
- 4) 八巻寿亮：宮城の算額 続々，謄写版(1980)
- 5) 八巻寿亮：宮城の和算，けやきの街(1985)
- 6) 萬伸介：宮城の和算の修正作業—吉岡八幡神社算額—，第 15 回全国和算研究大会，2019 年 7 月
- 7) 萬伸介：最近確認された宮城県内の算額について，第 14 回全国和算研究大会，2018 年 8 月
- 8) 萬伸介：丸森町・大和町・角田市の算額について，第 27 回東北地区和算研究交流会，2018 年 10 月
- 9) 日本學士院 日本科學史刊行會 編纂：明治前日本數學史 第一～四卷，岩波書店(1954～1959)
- 10) 平山諦：関孝和，恒星社厚生閣(1959)
- 11) 加藤平左エ門：算聖関孝和の業績，槇書店(1972)
- 12) 平山諦，内藤淳：松永良弼，東京法令出版(1987)
- 13) 佐藤健一：算祖，研成社(1987)
- 14) 道脇義正：幕末の偉大なる数学者，多賀出版(1989)
- 15) 松崎利雄：算法古今通覧，筑波書林(1996)
- 16) 谷垣美保：大和町舞野観音堂奉納算額の第 14 問について，第 28 回東北地区和算研究交流会，2019 年 10 月
- 17) 土倉保：算法助術，朝倉書店(2014)

付録 黒川郡大和町舞野正観音奉納算額 翻刻

【凡例】

- 一、漢字は、原則として常用漢字を使用し、常用漢字以外のは正字に改めた。
- 二、本文では、朱書の部分を『』でくくった。
- 三、印章は、(印)、(朱印)のように記した。
- 四、本文では、必要に応じて(第一問)(第二問)のように標注を附した。
- 五、欠損や判読不能の場合、字数が推定できるものは□□で示した。
- 六、本調査では判読不能だったが、先行する大和町教育委員会(二〇〇八年)、萬伸介氏(二〇一七年)の調査で読まれた文字を参考にして文字を推定でき、残画等に矛盾なしと判断できる場合には□に文字を入れて記した。

【翻刻】

奉納算題 関流十二伝佐藤良平祐嗣門人

『旭水斎』

(第一問)

相沢治左衛門祐貞謹撰(朱印)

今有如図弧環加台内容球_{球辺切台上下平面及環背}

充内無動上径六分五厘下径四

寸五分五厘球径二寸六分問外積幾何

答云外積一十五歩二分有奇

術云倍球径名天自之加上下径差冪平方開之名地内減上下径和余

以除上径乘下径倍之加地乘地以天除之半之為円径置地半之為弦

求弧積及離徑置天乘離徑以弦除之内減上下径和余乘弧積二之以

減弦冪因球径余寄位上下径和乘上径加下径冪乘球径半之加寄位

内減球径再乘冪余乘立円積法得外積合問

(第二問)

今有如図立方形以円塙貫之_{□自上下隅至下左隅斜貫之}只言立方面一十寸円塙径四

寸問方内貫空積幾何

高橋虎藏政則 謹撰(朱印)

答云貫空積一百七十八寸有奇

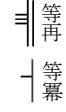
(第二問)

術云置三個平方開之乘方面及円積法寄位置^二分七厘五毛平方開之乘塙円径以減寄位余乘塙円径算得空積合問

文屋利左衛門広謹撰 (朱印)

今有方内如図容交側円及等円五個只云等円径若干問^求方面術如何

答云求方面術如左

依術求得^{等再}^{等幕}開方式立方開之得方面合問

(第四問)

相沢竹治為安 謹撰 (朱印)

今有如図側円塙長径一十四寸短径九寸高一十寸從短径^至下周斜截之問上積幾何

答云上積二百一十寸

術云置長径以短径及高相乘六除之得上積合問

(第五問)

大内運作成^能 謹撰 (朱印)

今有如図円内設斜容元円一個亭円三個利円三個貞円二個^{元円周重斜交}只云外円径五寸欲使亭円径最多問貞円径幾何

答云貞円径一寸二分有奇

術云置一万四千開平方以減一百二十個余名極開平方加四個七分

五厘四之加極以除六個乘外円径得貞円径合問

(第六問)

今有大方内如図設重円容小方及元亨利貞八円只言大方面若干問八円

径和幾何

高橋東吉茂明 謹撰 (朱印)

答云依左術求八円径和

術云置大方面二百二十七段一百五十除之得八円径和合問

(第七問)

高橋桑兵衛則之謹撰 (朱印)

今有如図円内容甲円^一個乙円二個丙円一個只言甲円径四寸乙円径一寸四分問円径幾何

答云円径七寸

術云以甲円径除乙円径半之名極自之加^二平方開之加極乘極以

（第八問）

減一個余以甲乙円径相得円径合問

高橋庄吉政親 謹撰（朱印）

今有弧内如図容三角及甲乙円只言甲円径^若乙円径^若問三角中鉤幾何

答云依左術求中鉤

術云置甲円径三之加乙円径四除之得三角中鉤合問

（第九問）

今有如図外円内容天地人円各円心作鉤股矩鉤三寸股四寸問天地人円径及外円径幾何

福田長兵衛喜久謹撰（朱印）

答云人円径^{二寸}地円径^{四寸}天円径^{六寸}外円径^{一尺一寸}

術云以鉤股求弦以減鉤股和余得人円径以減鉤二段余得地円径以

減弦二段余得天円径加地円径及人円径得外円径合問

（第十問）

高橋万藏益信 謹撰（朱印）

今有三斜内如図容大中小方三箇設甲乙丙斜只云甲斜若干乙斜若干大方面若干問得丙斜術如何

答云依左術求丙斜

術云置大方面三之自之加乙斜冪半之内減甲斜冪余開平方得丙斜

合問

（第十一問）

相沢庄助祐儀 謹撰（朱印）

今有全円内如円設三斜^{※1}二件容甲乙丙丁及天地円^{乃天地円之}只言甲乙丙

丁円各径若干問得全円径術如何

答云依左術得全円径

術云置乙円径^{以下円径二字略之}自之乘丁^{名天}置丁四之加丙自之乘甲内減天

余以甲丁和二段与乙丙和除之^{名地}以除天加甲二段与乙和^{名人}置地以

甲因丁四段除之以減二個余以除人得全円径合問

（第十二問）

相沢平内祐信 謹撰（朱印）

今有角形其角数若干問角中径^{請起自三角雖至万万角依術帛除式答之○仮図八角}

答云求角中径術如左文

術云立天元一為角中径列角数自乗之 三百一十二万六千八百九十口段 内減 五百口十四万口 余
 乗角中径以減角数再乗幂与角面相乗 四十九万七千六百六十口段 余乗角数三乗幂寄
 甲位○列角数 三万四千一百一十九段 内減 一十口万四千一百口上六個 余乗角数加 口口口万五千八百八十五個 乗角数
 内減 二十八万五千四百一十四個 余乗角面内角数与角中径相乗 七十九万四千四百口段 寄乙位○加入
 甲位以減角数幂与角中径相乗 二百七十五万口 余寄丙位○列角数幂 二百八十八段
 三十一万四千五百六十口段 内減 六十一万四千四百口個 余乗角中径加乙位内減甲位余以 減 加 丙
 位 六角以下者以減七角以上者加之 得数寄左○列角中径 五十六万七千七百六十九段 与寄左相消得帰除
 式実如法而一得角中径合間

各九拌

慶応四年龍集戊辰

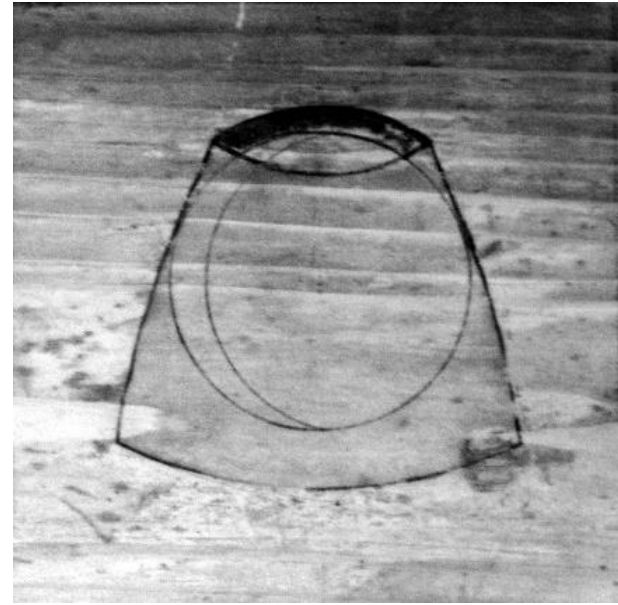
春三月十有八日

(朱印) (朱印)

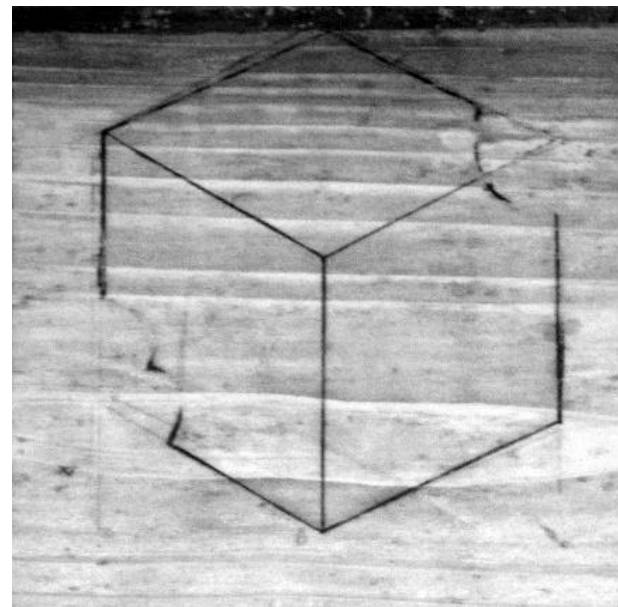
※1 円…本文では円となっているが、図とあるべきか。

【図】 赤外線写真

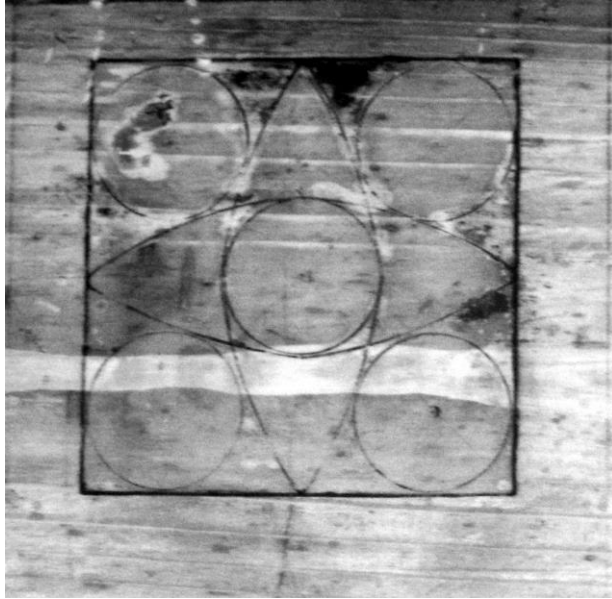
(第一問)



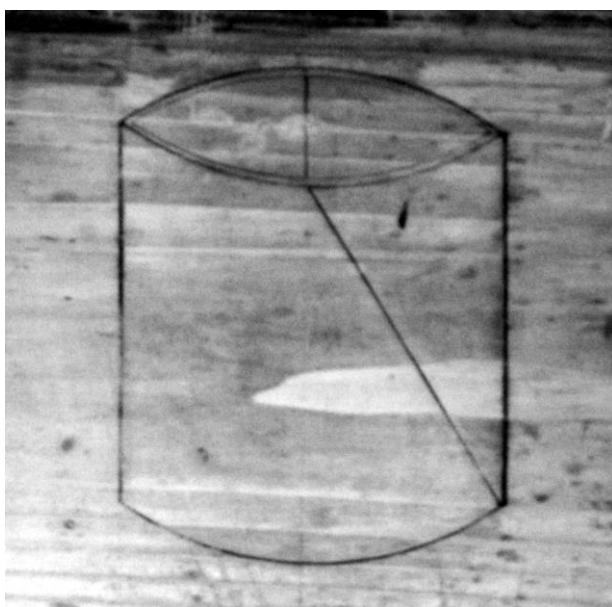
(第二問)

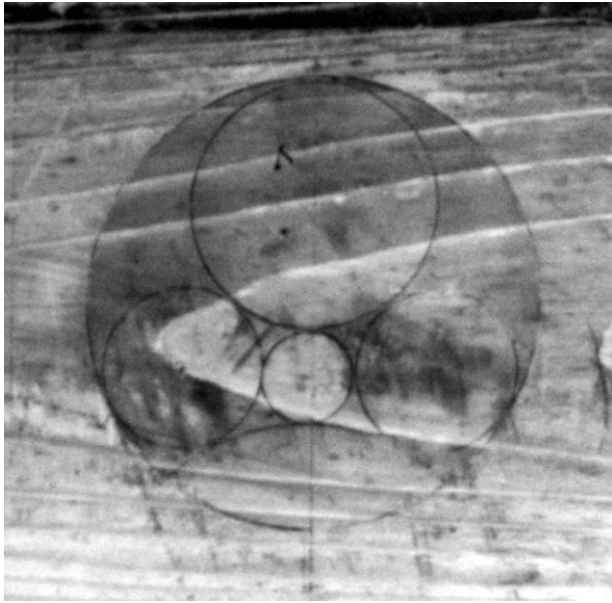


(第三問)

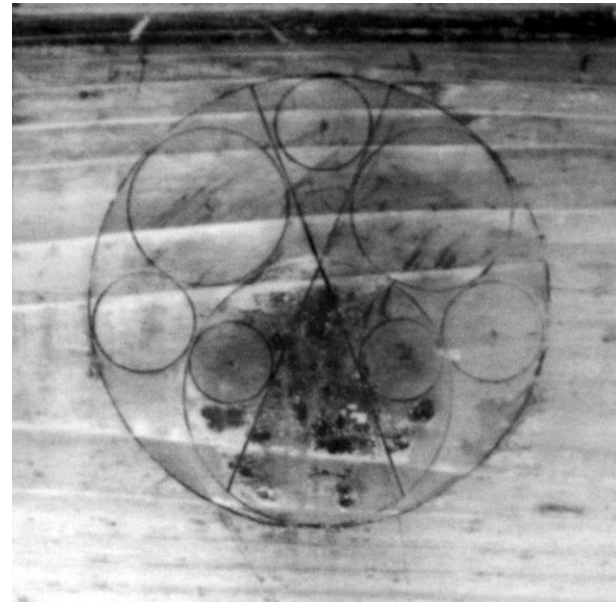


(第四問)





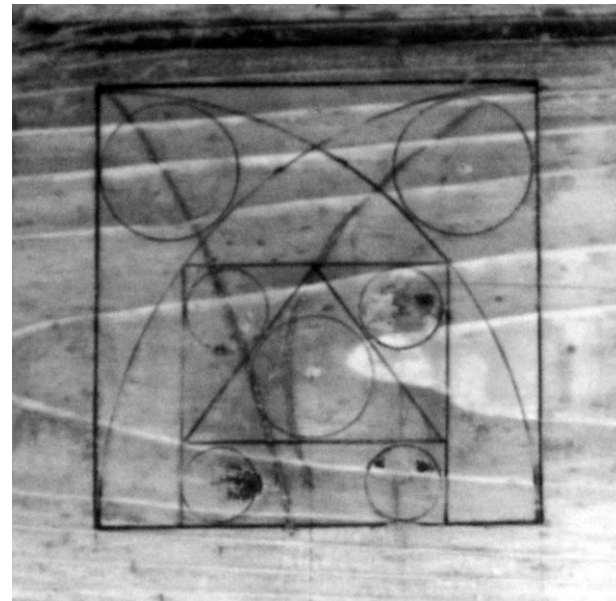
(第七問)



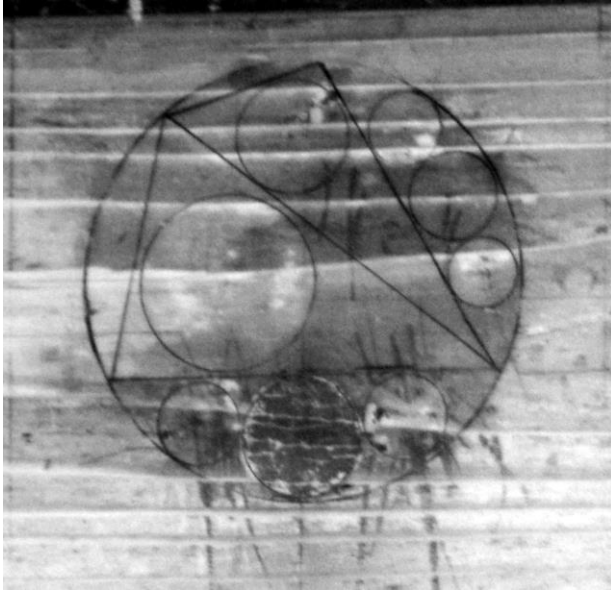
(第五問)



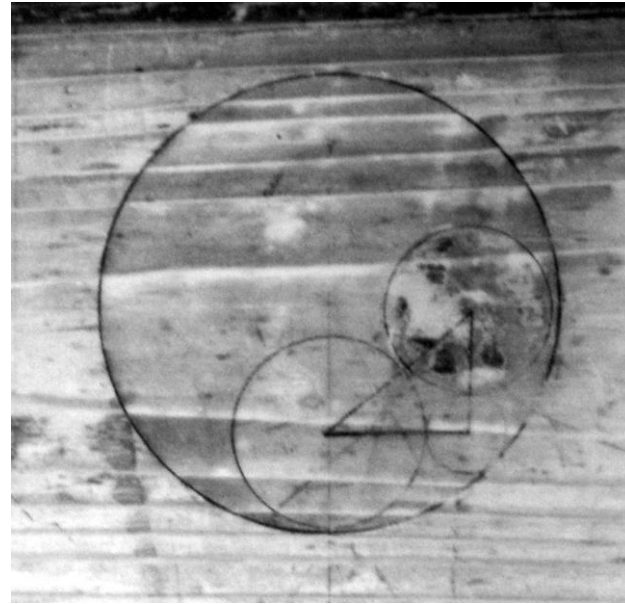
(第八問)



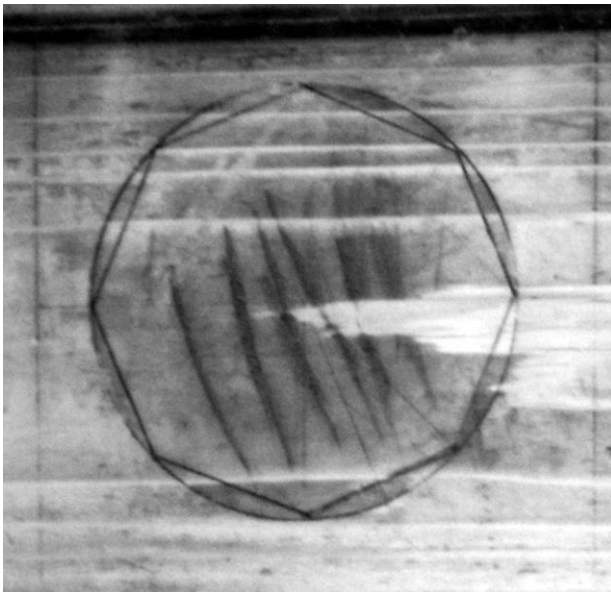
(第六問)



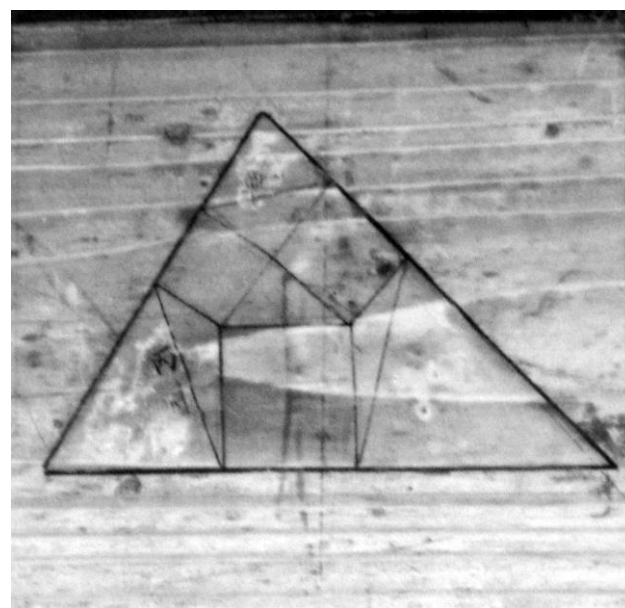
(第十一問)



(第九問)



(第十二問)



(第十問)