

板まわりの数値シミュレーション

1 はじめに

流体と聞いて、真っ先に思い浮かぶのは水や空気である。それらはあまりにも当たり前我々の周りがあるため、その存在を実感する機会は少ない。無色透明であるから流れの様子を見ることはできないし、プールに入って動きづらくなることを体感することがある程度だろうか。実際には、自動車や鉄道など高速で移動する物体には空気があるがゆえに発生する力が存在するし、飛行機が上空を飛行したり船が進むことができるのも流体があるがゆえの現象である。

流体力学のはじまりはアルキメデスまでさかのぼる必要はないかもしれないが非常に古い。しかし、現在でも円柱など単純形状物体まわりの研究は第一線の研究トピックとして扱われている。その理由は単純であり、理解できていないことが未だあるからである。

物体まわりの流れの研究方法は、解析的な方法と実験的な方法、数値計算による手法がある。近年、コンピュータの急激な進歩により数値シミュレーションの研究が進展している。数十年前のスーパーコンピュータは、もはや現在では個人が購入できるパーソナルコンピュータのスペックと同等になっている。しかし現在では、どの手法で研究にアプローチすべきかを選択し、その結果を十分に理解して取り入れることが必須である。

本実験では、物体として矩形板、楕円柱を採用し、板まわりの流れの数値シミュレーションを行なう。

2 目的

板まわりの流れの数値シミュレーションを行ない、流体力学で取り上げられる諸量と、特に揚力・抗力といった流れの性質を理解する。ここで、数値計算の具体的な方法を理解することが本実験の目的ではないことを断っておく。

3 計算方法

計算領域は図1に示すように2次元領域である。座標系は物体中央を原点とし、流れ方向に x 、流れと垂直方向に y とする。格子点数は $N_i \times N_j = 128 \times 64$ である。物体が楕円柱の場合には円形格子を用いる。矩形板の場合には矩形格子を用いる。速度境界条件には、壁面に滑り無し条件を課す。離散化には差分を用い、移流項には3次の上流差分、その他の項には2次の中心差分を採用する。

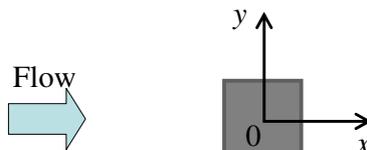


Fig. 1 座標系

支配方程式は非圧縮性ナビエ・ストークス方程式、連続の式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

無次元系では、

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* = -\nabla p^* + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^* \quad (3)$$

(*は無次元数を表わす) である。ここで、 \mathbf{u} は速度ベクトル、 t [s] は時間、 ρ [kg/m³] は密度、 p [Pa] は圧力、 ν

[m²/s] は動粘性係数, ∇ (ナブラ) はベクトル微分演算子で

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

を表わし, 2次元では $\mathbf{u} = (u, v)$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

となる。(考察に必要としないであろう計算方法の詳細は省略する.)

4 シミュレーションの内容

4.1 差分とは

差分とは微分を離散点で近似する手法である. 近似式は一つに決まらず, 場合により選択の必要がある. たとえば, 2次精度の中心差分は関数 f の1階微分

$$\frac{\partial f}{\partial x} \sim \frac{(f_{n+1} - f_{n-1}))}{2\Delta x}, \quad (4)$$

ここで n は格子点番号を示す. 2階微分

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sim \frac{(f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}))}{\Delta x^2} \quad (5)$$

で近似できる. 3次精度上流差分は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim u_n \frac{-u_{n+2} + 8(u_{n+1} - u_{n-1}) + u_{n-2}}{12\Delta x} + \frac{|u_n| \Delta x^3}{12} \frac{u_{n-2} - 4u_{n-1} + 6u_n - 4u_{n+1} + u_{n+2}}{\Delta x^4} \quad (6)$$

と近似する.

詳しい内容は, 本実験の目的からはずれるため, 数値計算の授業に譲ることにする.

4.2 レイノルズ数

レイノルズ数は

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (7)$$

と表わすことができる. ここで, U [m/s] は代表速度, L [m] は代表長さ (本計算では, 板の流れ方向長さ), ν [m²/s] は動粘性係数である. 動粘性係数は密度 ρ [kg/m³] と粘性係数 μ [Pa·s] から次のように書ける.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (8)$$

4.3 圧力

圧力は流体に働く応力の一つで, ある単位断面の法線方向に働く力といって良い. 単位は Pa (パスカル) = N/m² である.

4.4 流線

流線とは各点における速度ベクトルの接線をつなげたものであり, 一般に流跡線と流脈線とは区別される.

4.5 渦度

渦度は

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \boldsymbol{u} \quad (9)$$

である。2次元流れの場合、

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad [1/\text{s}] \quad (10)$$

となる。

4.6 迎角, 揚力・抗力

図2のように物体が流れに対してなす角度 α を迎角という。また、図3のように、物体に働く力の流れと垂直方向に働く分力を揚力 (Lift) といい、流れと平行方向に働く分力を抗力 (Drag) という。それぞれ、揚力 L [N]・抗力 D [N] は

$$L = C_L \frac{1}{2} \rho U^2 S \quad (11)$$

$$D = C_D \frac{1}{2} \rho U^2 S \quad (12)$$

と表わされ、 C_L , C_D は揚力係数, 抗力係数と呼ばれる。 S [m²] は投影面積を示す。(本計算では奥行き方向長さ1として S の部分は長径 a または長さ l となる。)

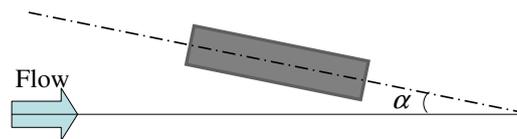


Fig. 2 迎角

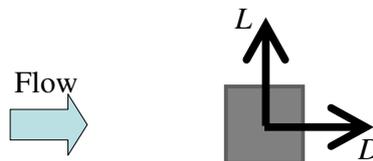


Fig. 3 揚力と抗力

4.7 表示の量

図4に示すように左上に圧力の等値線, 右上に流線, 左下に渦度の等値線, 右下に速度ベクトルを表示している。

4.8 条件

主流速度 $U = 5$ m/s, 楕円柱長軸 $a = 3.024 \times 10^{-3}$ m, 短軸 $b = 3.780 \times 10^{-4}$ m である。矩形板は長さ $l = 3.024 \times 10^{-3}$ m, 厚さ $d = 3.024 \times 10^{-6}$ m であり, 作動流体は空気で動粘性係数 $\nu = 1.512 \times 10^{-5}$ m²/s (20 °C) である。計算に用いる時間間隔は $\Delta t = 0.016556$ s である。

楕円柱では, 迎角 0, 4, 8, 12 degree の4つのケースについて, 矩形板では, 迎角 0, 4, 8, 12, 16, 20 degree の6つのケースについて計算を行なう。

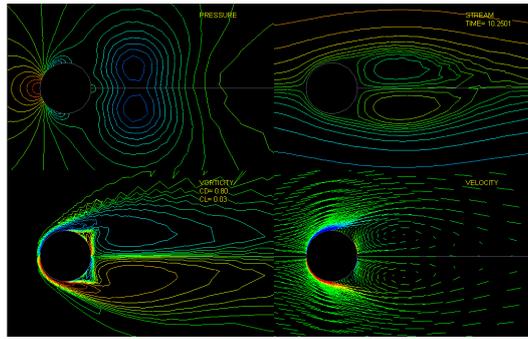


Fig. 4 画面の表示

5 課題

1. 航空機に働く抵抗は様々ある。簡単な説明を付してそれらを述べよ。
2. 今回は、数値計算により流れの可視化を行なった。実験で空気や水の流れの可視化を行なう場合、どのような手法があり、どのような特徴があるか調べよ。
(ここまで、省略可)
3. 流線，流跡線，流脈線とは何か説明せよ。
4. 本数値計算におけるレイノルズ数を求めよ。
5. 式3は、パラメータとして速度，圧力，レイノルズ数，(時間)がある。これらの単語を用いて式を考察せよ。
6. 上のパラメータの中に渦度は含まれていない。それではいったい渦度とは何なのか考察せよ。
7. 境界層のはく離はどのようなメカニズムで生じるのか説明せよ。
8. 同じ物体で迎角を変えることで、流れはどのように変化し、揚力・抗力にどのような変化があるか考察せよ。
9. 揚力はなぜ発生するのか考察せよ
10. 他、オリジナルな考察

6 論文の書き方

ここに挙げる規則が全てが正しいというわけではない。それぞれの分野、雑誌に書き方のルールが存在し、それにしたがって論文を書く必要がある。ここでは、本実験レポートの書き方のルールとして補足を加えることにする。

(注) 提出期限を過ぎた場合、よっぽどの理由がない限り受け取ることはない。

6.1 レポートの提出について

- 2週目、授業開始時間にグループのメンバー全員が集まって教員室へ提出すること（を推奨する）。一人目のレポートチェックで注意した箇所は、二度説明することはないので注意すること
- 1度目の提出からレポートを受け取ることにする。ただし、それで合格点に達しているとは限らないので注意すること

6.2 レポートの構成

表紙, 要旨

1. 緒言
2. 目的
3. 実験または計算方法
4. 結果
5. 課題と考察
6. 結論

参考文献

図, 表

付録

ここで, 要旨とは「手法+方法+結論」を書く所である.

例) ○○という手法を用いて, **を行なった. 結果, .. であり△△であることが分かった.

6.3 補足 1

- 論理的に正しいこと, 結論に必要なものだけ載せること
- 文中に説明のないような図は必要ないものであるから, 載せないこと
- 句点は「.(ピリオド)」, 読点は「,(カンマ)」で文章を構成すること

6.4 補足 2

- 変数はイタリックで書き, 具体的な数字の後ろの単位は [] で囲まないこと
質量 m [kg], $m = 13$ kg の鋼球を用いた.
- 図のキャプションは図の下に, 表のキャプションは表の上を書くこと

6.5 補足 3

- 主張をするに必要な材料は揃っているか
「だと思う.」, 「だと予想 (推測) できる.」のフレーズは書かない.
- 論文で, 「です, ます」調はやめること
主語と述語が一致した, きれいな文章で簡潔に言い切ること.

6.6 補足 4

論文は自分用のメモではない. 他人に読んでもらうためのものである. ゆえに, 読んでもらって, 理解してもらって初めて意味をなすものである. 分かりやすいように書くこと.

6.7 補足 5

図5に示すように，文中は「図」を，図の中の文字は英語を用いることが望ましい．(ちなみに Fig. のピリオドは省略しているの意)

英語では文頭では Figure (Equation)，文中では Fig. (Eq.) を用いる．たとえば，

Figure5 shows the vortical structures inside the boundary layer.

The flow changes to the turbulent state as shown in Fig.5. とか．

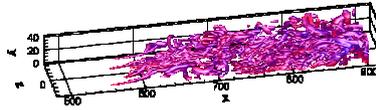


Fig. 5 渦の図

書き方の例

自分の言葉ではない場合，きちんと参考文献を示すこと．(インターネットにある HP の利用は各自で判断すること.)

参考文献

- [1] Noro, S., and Depp, J. C., “What is a Vortex”, Journal of Vortex, Vol. 1 (2013), pp. 1-13.
- [2] 野呂秀太, 湯ノ川学, “論文の例”, 仙台論文集, Vol. 1 (2013), pp. 20-35.
- [3] 野呂秀太, 論文の手引き, 初版 (2013), p. 5, 仙台高専.