平成３０年度専攻科入学者選抜学力検査問題

数　　学

（ 試験時間　13：00 ～ 14：30 ）

（注　意）

1 配布物は，問題用紙・草案用紙・解答用紙である．
2 問題用紙は合図があるまで開かないこと．
3 問題用紙は１ページから８ページまでである．
検査開始の合図のあとで確認すること．
4 解答用紙は１枚である．
5 第１問および選択問題（第５問または第６問）は答のみ記入せよ（原則として部分点はない）．第２問，第３問，第４問の解答は説明を添えること（部分点の対象とする）．
6 説明の記述が解答用紙の所定欄におさまらない場合は、続きの関係を明記のうえ、裏面に記載してもよい．
7 問題用紙・草案用紙は検査終了後持ち帰ること．

仙台高等専門学校　生産システムデザイン工学専攻

平成30年度仙台高等専門学校専攻科 (生産システムデザイン工学専攻) 入学者選抜学力検査問題

検査科目	数 学

$\boxed{1}$ (60 点)

以下の文章の空欄には, ある非負整数 (すなわち 0, 1, 2, 3, ... で, 選択肢の番号のこともある) が入る. あてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ.
ただし, 記号 $*$ の空欄に対しては記入は不要である.

(1) 因数分解された整式

[1] $(x-1)(x^2+x+1)$　　[2] $(x-1)(x^2-x+1)$
[3] $(x+1)(x^2+x+1)$　　[4] $(x+1)(x^2-x+1)$

のうち,

(1.1) x^3-2x^2+2x-1 に一致するものは $\boxed{ア}$ である.

(1.2) x^3+1 に一致するものは $\boxed{イ}$ である.

(2) x についての恒等式

$$\frac{1}{x^2-x-6}=\frac{1}{\boxed{ウ}}\left(\frac{1}{x-\boxed{エ}}-\frac{1}{x+\boxed{*}}\right)$$

が成り立つ.

広義積分 $\displaystyle\int_4^{\infty}\frac{dx}{x^2-x-6}$ の値は $\dfrac{1}{\boxed{ウ}}\log\boxed{オ}$ である.

(3) 分数関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (a, b, c, d は定数で c および $ad-bc$ は 0 ではない) について,

(3.1) 直線 $x=\boxed{カ}$ は双曲線 $y=f(x)$ の漸近線である.

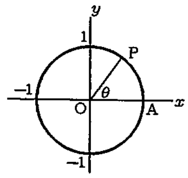
(3.2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ は $\boxed{キ}$ である.

(3.3) x についての恒等式 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\boxed{キ}+\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\boxed{ク}}{cx+d}$ が成り立つ.

[空欄 "カ"~"ク" の選択肢]

[1] $\dfrac{a}{c}$　[2] $-\dfrac{a}{c}$　[3] $\dfrac{b}{c}$　[4] $-\dfrac{b}{c}$　[5] $\dfrac{d}{c}$　[6] $-\dfrac{d}{c}$
[7] $ad-bc$　[8] $bc-ad$

(4) xy 平面において, 原点を中心とする半径 1 の円を考える. この円上を動く動点が, 点 A(1,0) から出発して反時計回りに θ ラジアン回転して進み, 点 P に到達したとする (右図参照).



(4.1) 点 P の x 座標は $\boxed{ケ}$ であり, y 座標は $\boxed{*}$ である.

(4.2) 点 A から P まで動点が進んだ距離は $\boxed{コ}$ である.

(4.3) 扇形 OAP の面積は $\boxed{サ}$ である.

[空欄 "ケ"〜"サ" の選択肢]

[1] $\sin\theta$　[2] $\cos\theta$　[3] $\tan\theta$　[4] θ　[5] $\dfrac{\theta}{2}$　[6] 2θ

(4.4) $\sin^2\theta+\cos^2\theta$ の値はつねに $\boxed{シ}$ である.

(4.5) 以下の定積分のうち, 値が $\dfrac{\pi}{4}$ であるものは $\boxed{ス}$ である.

[空欄 "ス" の選択肢]

[1] $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+1}dx$　[2] $\displaystyle\int_{1}^{2}\sqrt{x^2-1}\,dx$　[3] $\displaystyle\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$

(5) 座標平面の動点 $\mathrm{P}(x,y)$ があり, その座標は時刻 t の関数として

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

で与えられる.

(5.1) 時刻 0 のとき, P は点 $\left(\boxed{\text{セ}}, \boxed{*}\right)$ に一致する.

(5.2) x, y がみたす関係式は $\boxed{\text{ソ}}$ である.

[空欄 "ソ" の選択肢]

[1] $x^2 + y^2 = 1$ **[2]** $x^2 - y^2 = 1$ **[3]** $y^2 - x^2 = 1$

いま, T を正の数とし, 時刻 T のときの P の座標を (X, Y) で表す.
y を x の関数と見て定積分

$$\int_1^X y\, dx$$

を考える.

(5.3) この定積分の値を T で表すと $\dfrac{1}{\boxed{\text{タ}}}\left(e^{2T} - e^{-2T}\right) - \dfrac{1}{\boxed{\text{チ}}}T$ となる.

(5.4) この定積分の値を X で表すと $\boxed{\text{ツ}}$ となる.

[空欄 "ツ" の選択肢]

[1] $\dfrac{1}{2}\left\{X\sqrt{X^2-1} - \log\left(X + \sqrt{X^2-1}\right)\right\}$

[2] $\dfrac{1}{2}\left\{X\sqrt{X^2-1} + \log\left(X + \sqrt{X^2+1}\right)\right\}$

[3] $\dfrac{1}{2}\left\{X\sqrt{X^2+1} + \log\left(X + \sqrt{X^2+1}\right)\right\}$

(6) α を座標空間における平面 $ax + by + cz + d = 0$ とする．平面 α 上にはない点 $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$ から α に垂線を引いて交点を $\mathrm{H}(x_1, y_1, z_1)$ とする．

(6.1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ の成分表示は $\boxed{\text{テ}}$ である．

[空欄 "テ" の選択肢]

[1] $(x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$
[2] $(x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ z_0 - z_1)$
[3] $(x_1 + x_0,\ y_1 + y_0,\ z_1 + z_0)$

(6.2) ベクトル $\overrightarrow{n}$ を $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ と定めるとき，
以下の文章のうち**正しいもの**は $\boxed{\text{ト}}$ である．

[空欄 "ト" の選択肢]

[1] $\overrightarrow{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ は垂直である
[2] $\overrightarrow{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ は平行である

(6.3) 以下の文章のうち**正しいもの**は $\boxed{\text{ナ}}$ である．

[空欄 "ナ" の選択肢]

[1] 内積 $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HP}}$ は零となる．
[2] 内積 $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HP}}$ の絶対値は $|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{HP}}|$ に一致する．

(7) 3 次対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ について考える．

(7.1) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し，行列の積 $A\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}$ の定数倍 $\boxed{\text{ニ}}\,\boldsymbol{u}$ になる．

(すなわち，等式 $A\boldsymbol{u} = \boxed{\text{ニ}}\,\boldsymbol{u}$ が成り立つ．)

(7.2) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し，等式 $A\boldsymbol{v} = \boxed{\text{ヌ}}\,\boldsymbol{v}$ が成り立つ．

(7.3) ベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ネ}} \\ \boxed{\text{ノ}} \\ -2 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の両方に直交し，
積 $A\boldsymbol{w}$ を計算すると $\boldsymbol{w}$ の定数倍 $\boxed{\text{ヌ}}\,\boldsymbol{w}$ になる．

(8) a, b, c を定数として変数 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の二変数関数

$$f = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x}^2 + 2b\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} + c\boldsymbol{y}^2$$

を考える.

(8.1) 偏微分係数について

$f_{xx}(0,0) = \boxed{\text{ハ}}$, $f_{xy}(0,0) = \boxed{\text{ヒ}}$, $f_{yy}(0,0) = \boxed{*}$

が成り立つ.

[空欄 "ハ", "ヒ" の選択肢]

[1] a [2] $2a$ [3] b [4] $2b$ [5] c [6] $2c$

(8.2) $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とおくとき,

f は行列の積として $f = \boxed{\text{フ}}$ という形に変形できる.

[空欄 "フ" の選択肢]

[1] $\boldsymbol{p}\, S\, \boldsymbol{p}$ [2] $\boldsymbol{p}\, S\, {}^t\boldsymbol{p}$ [3] ${}^t\boldsymbol{p}\, S\, \boldsymbol{p}$ (記号 ${}^t\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p}$ の転置行列を表す)

(8.3) 行列 S の固有値を α, β とおく.
以下の文章のうち, **正しくない**ものは $\boxed{\text{ヘ}}$ である.

[空欄 "ヘ" の選択肢]

[1] α, β は二次方程式 $\boldsymbol{\lambda}^2 - (a+c)\boldsymbol{\lambda} + ac - b^2 = 0$ の解である

[2] 適当な直交行列による変数変換 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ で $f = \alpha\boldsymbol{u}^2 + \beta\boldsymbol{v}^2$ と書ける

[3] $S - \alpha E$ および $S - \beta E$ は正則行列である (記号 E は単位行列を表す)

(8.4) 関数 f が $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (0,0)$ において極小であったとする.
以下の条件のうち, **成り立たない**ものは $\boxed{\text{ホ}}$ である.

[空欄 "ホ" の選択肢]

[1] $\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$ [2] $a + c < 0$ [3] $ac - b^2 > 0$

$\boxed{2}$ (8 点)

余弦の加法定理

すべての実数 α, β に対し等式

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$

が成り立つ

を既知として, 以下『$\cdots$』内の事実を証明せよ.

『すべての実数 A, B に対し等式

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

が成り立つ』

$\boxed{3}$ (8 点)

2 次の正方行列 X, Y が等式 $X+Y=E$ (単位行列) および $XY=O$ (零行列) をみたすとき, すべての自然数 n に対し $X^n = X$ かつ $Y^n = Y$ となることを証明せよ.

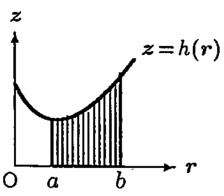
$\boxed{4}$ (8 点)

区間 $a \leqq r \leqq b$ において正の値をとる連続関数 $h(r)$ を考える. ただし, a, b は負でない定数で $a < b$ をみたす. 以下『$\cdots$』内の事実に対し, そのようになる理由を説明せよ.

『rz 座標平面において,

連立不等式 $\begin{cases} a \leqq r \leqq b, \\ 0 \leqq z \leqq h(r) \end{cases}$

が表す範囲 (右図縦線部)



を z 軸の周りに回転させて得られる立体の体積は

定積分 $\displaystyle\int_a^b 2\pi r h(r)\, dr$ で与えられる』

以下の $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から1問を選択して答えよ．選択した問題番号を解答用紙の指示された箇所に必ず明記すること．

$\boxed{5}$ (16点)

変数 t の関数 $x = x(t)$ について考える．
以下の空欄 "ア"～"オ" の解答欄には選択肢の番号を，
空欄 "カ"～"ク" の解答欄には適する数 (自然数) を記入せよ．

(1) 関数

[1] e^t　　[2] e^{2t}　　[3] te^t　　[4] te^{-t}

[5] $\sin t$　　[6] $\sin\sqrt{2}t$　　[7] $\sin 2t$　　[8] $e^t \sin t$　　[9] $e^{-t}\sin t$

[10] $t\sin t$　　[11] $2t\sin t$　　[12] $\dfrac{1}{2}t\sin t$

のうち

(1.1) 微分方程式 $x'' - x' - 2x = 0$ の解であるものは $\boxed{\text{ア}}$ である．

(1.2) 微分方程式 $x'' + 2x' + x = 0$ の解であるものは $\boxed{\text{イ}}$ である．

(1.3) 微分方程式 $x'' + 2x' + 2x = 0$ の解であるものは $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(1.4) 微分方程式 $x'' + 2x = 0$ の解であるものは $\boxed{\text{エ}}$ である．

(1.5) 微分方程式 $x'' + x = \cos t$ の解であるものは $\boxed{\text{オ}}$ である．

(2) 微分方程式 $x'' + x = \cos t$ の解で初期条件 $x(0) = 1$, $x'(0) = \sqrt{3}$ をみたすものは

$$x = \boxed{\text{カ}}\sin\left(t + \frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}}\right) + \boxed{\text{オ}}$$

の形に書ける．

この関数 x はまた

$$x = \boxed{\text{カ}}\cos\left(t - \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}\right) + \boxed{\text{オ}}$$

の形にも書ける．

$\boxed{6}$ (16 点)

数列 $\{I_n\}$ および $\{J_n\}$ を定積分

$$I_n = \int_{-1}^{1} x \sin n\pi x \, dx, \qquad J_n = \int_{-1}^{1} x^2 \cos n\pi x \, dx$$

で定める．ただし, n は自然数 $(n = 1, 2, \ldots)$ である．

以下の空欄には，ある自然数 (選択肢の番号のこともある) があてはまる．あてはまる自然数を解答用紙の所定欄に記入せよ．

(1) 文字式

[1] $(-1)^n$ [2] $(-1)^{n-1}$ [3] 0 (定数) [4] 1 (定数)

のうち $\sin n\pi$ に一致するものは $\boxed{ア}$ である．

また, $\cos n\pi$ に一致するものは $\boxed{イ}$ である．

(2) 定積分 I_n の値を計算すると $I_n = -\dfrac{\boxed{ウ}}{n\pi} \cos n\pi$ となる．

(3) 定積分 J_n と I_n の間には $J_n = -\dfrac{\boxed{エ}}{n\pi} I_n$ という関係が成り立つ．

定積分 J_n の値を計算すると $J_n = \dfrac{\boxed{オ}}{n^2\pi^2} \cos n\pi$ となる．

(4) 数 J_0 を定積分 $J_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 \, dx$ として定めるとき, その値は $J_0 = \dfrac{1}{\boxed{カ}}$ である．

(5) フーリエ級数の収束定理より, 等式

$$x^2 = J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} J_n \cos n\pi x$$

が $-1 \leqq x \leqq 1$ をみたすすべての x に対して成り立つ．この事実と問 (4) までの結果を利用すると, いくつかの級数の値が求められる．例えば,

(5.1) 級数 $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \cdots\cdots$ の値は $\dfrac{\pi^2}{\boxed{キ}}$ である．

(5.2) 級数 $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots\cdots$ の値は $\dfrac{\pi^2}{\boxed{ク}}$ である．

(問題は以上である)