平成３１年度専攻科入学者選抜学力検査問題

数　　学

（ 試験時間　13：00 ～ 14：30 ）

（注　意）

1. 配布物は，問題用紙・草案用紙・解答用紙である．
   問題用紙は合図があるまで開かないこと．
2. 問題用紙は１ページから５ページまである．また，
   解答用紙は４枚である．検査開始の合図のあとで確認すること．
3. 第１問は答のみを記入せよ（原則として部分点はない）．
   第２問，第３問，第４問，および選択問題の解答では
   説明も添えること（部分点の対象とする）．
4. 選択問題の解答では選択した問題の番号（5または6）を
   解答用紙の所定欄に明記すること．
5. 説明の記述が解答用紙の所定欄におさまらない場合は，
   続きの関係を明記のうえ、裏面に記載してもよい．
6. 問題用紙・草案用紙は検査終了後持ち帰ること．

仙台高等専門学校　生産システムデザイン工学専攻

平成 31 年度仙台高等専門学校専攻科 (生産システムデザイン工学専攻) 入学者選抜学力検査問題

検査科目	数 学

1 (40 点)

以下の文章の空欄には, ある非負整数 (すなわち 0, 1, 2, 3, ... で, 選択肢の番号のこともある) が入る. あてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ.
ただし, 記号 * の空欄に対しては記入は不要である.

(1) i を虚数単位 ($i^2 = -1$) とするとき,

(1.1) $(1+i)^4$ の値は $-\boxed{\text{ア}}$ である.

(1.2) $\dfrac{3+6i}{2-i}$ の値は $\boxed{\text{イ}}\,i$ である.

(2) 未知数 x (実数) についての方程式

$$4^x - 6 \cdot 2^x - 16 = 0$$

を解くと

$$x = \boxed{\text{ウ}}$$

を得る.

(3) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ かつ $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ をみたす θ に対し,

(3.1) $\cos\theta$ の値として適切なものは, 以下の $\boxed{\text{エ}}$ である.

[空欄 “エ” の選択肢]

[1] $\dfrac{2}{3}\pi$　　[2] $\dfrac{1}{2}$　　[3] $-\dfrac{1}{2}$

(3.2) $\sin 3\theta$ の値は $\boxed{\text{オ}}$ である.

(4) 不等式

$$\log_{0.1}(x-2) > \log_{0.1}(4-x)$$

の解として適切なものは, 以下の $\boxed{\text{カ}}$ である.

[空欄 “カ” の選択肢]

[1] $2 < x < 3$　　[2] $3 < x < 4$　　[3] 解なし

(5) 成分表示が

$$\vec{a} = (2,\ 1), \quad \vec{b} = (1,\ 2), \quad \vec{c} = (0,\ 3)$$

のベクトルに対し,

(5.1) ベクトル $2\vec{a} - \vec{b}$ の大きさは $\boxed{\text{キ}}$ である.

(5.2) ベクトル $\vec{c}$ をベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の線形結合として

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

の形に表すとき, 適する定数 m, n は

$$m = \boxed{*}, \quad n = \boxed{\text{ク}}$$

である.

(6) 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

について述べた以下の文章のうち, **間違っているものは** $\boxed{\text{ケ}}$ である.

[空欄 "ケ" の選択肢]

[1] 文字 a に関する次数は 3 である.

[2] $a = b$ のとき, この行列式の値は 0 となる.

[3] $a = -b$ のとき, この行列式の値は 0 となる.

(7) 以下の文章のうち, **間違っているものは** $\boxed{\text{コ}}$ である.

[空欄 "コ" の選択肢]

[1] 無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ はつねに収束して値 $\dfrac{1}{1-r}$ をもつ

[2] 無限小数 $0.999\cdots$ は無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$ の和と同じである

[3] 無限小数 $0.999\cdots$ は 1 に等しい

$\boxed{2}$ (15 点)

定義域が $x \geqq 0$ の連続関数 $f(x)$ があり,

$$x > 0 \text{ のとき } \ f(x) = x \log x$$

であるという (ただし $\log x$ は自然対数である).
関数 $y = f(x)$ のグラフを描き, グラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.
グラフに関しては

- 増減表
- 極値に対応する点の座標
- $x = 0$ に対応する点の座標

を明らかにせよ.

$\boxed{3}$ (15 点)

二変数関数

$$f = f(x,\ y) = x^3 - 6x^2 + 9x + y^2 - 4y$$

の極値を求めよ.
ただし, 以下『$\cdots$』に述べられた事実および記号は, 答案の中で自由に使用してよい.

『第 2 次偏導関数が連続な関数 $f = f(x, y)$ について, 二変数関数 $H = H(x,\ y)$ を

$$H = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$

で定めるとき, 偏導関数 f_x, f_y の値が同時に 0 になる点 (a, b) に対し,

- $H(a, b) > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) > 0$ なら f は (a, b) で極小
- $H(a, b) > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) < 0$ なら f は (a, b) で極大
- $H(a, b) < 0$ なら f は (a, b) で極値をとらない 』

$\boxed{4}$ (15 点)

行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ の n 乗 A^n を求めよ. ただし, n は自然数である.

以下の $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から１問を選択して答えよ．選択した問題番号を解答用紙の指示された箇所に必ず明記すること．

$\boxed{5}$ (15 点)

変数 t の関数 $x = x(t)$ について考える．
微分方程式

$$\frac{dx}{dt} - \frac{2tx}{t^2+1} = t^3 + t$$

の解で初期条件 $x(0) = 0$ をみたすものを求めよ．

$\boxed{6}$ (15 点)

a を正の定数として，関数 f を

$$f = f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leqq a \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > a \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．この関数 f のフーリエ変換を求め，等式

$$\int_0^\infty \frac{\sin au}{u}\, du = \frac{\pi}{2}$$

を証明せよ．

ただし，以下『$\cdots$』に述べられた事実および記号は答案の中で自由に使用してよい．

『実数全体で定義された関数 $f = f(x)$ に対し，積分

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-iux}\, dx$$

が存在するとき，これを u の関数と見て，関数 $F = F(u)$ を f のフーリエ変換と呼ぶ．
ある x において関数 f が連続ならば，この x に対し "反転公式" と呼ばれる等式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cdot e^{iux}\, du$$

が成り立つ．』

(問題は以上である)