２０２０年度専攻科入学者選抜学力検査問題

数　　学

（検査時間　13：00 ～ 14：30）

（注　意）

1　配布物は、問題用紙・解答用紙・草案用紙である。

2　問題用紙は合図があるまで開かないこと。

3　問題用紙は１ページから４ページまでである。
検査開始の合図のあとで確認すること。

4　解答用紙は２枚ある。

5　第１問は、答のみを記入せよ。第２問以降の解答は、
過程も含めて、全て解答用紙に記入すること。

6　問題用紙・草案用紙は検査終了後持ち帰ること。

7　選択問題の解答では、選択した問題の番号（５または６）を解答用紙の
所定欄に明記すること。

仙台高等専門学校　生産システムデザイン工学専攻

検査科目	数　学

$\boxed{1}$ (44 点)

以下の空欄には、ある自然数（選択肢番号のこともある）が入る。あてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(1)　指数不等式

$$17 \cdot 2^{x-1} > 4^x + 4$$

について、$X = 2^x$ とおくと

$$\frac{1}{\boxed{ア}} < X < \boxed{イ}$$

であるから $-\boxed{ウ} < x < \boxed{エ}$

(2)　無理関数 $y = 2\sqrt{3-x} + 1$ について、以下の問いに答えよ。

(2.1)　定義域は $\boxed{オ}$ である。

[空欄“オ”の選択肢]

[1]　$x < 3$　　[2]　$x \leqq 3$　　[3]　$x \geqq 3$　　[4]　$x > 3$

(2.2)　この関数のグラフは $y = \sqrt{-x}$ のグラフを $\boxed{カ}$ し、x 軸方向に $\boxed{キ}$、y 軸方向に $\boxed{ク}$ だけ平行移動したものである。

[空欄“カ”の選択肢]

[1]　x 軸方向に 2 倍に拡大　　[2]　x 軸方向に 1/2 倍に縮小

[3]　y 軸方向に 2 倍に拡大　　[4]　y 軸方向に 1/2 倍に縮小

[空欄“キ”、“ク”の選択肢]

[1]　-3　　[2]　-1　　[3]　1　　[4]　3

(3)　関数

$$y = \sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x \qquad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。２倍角の公式と合成公式を用いると

$$y = \sqrt{\boxed{ケ}}\sin 2x - \cos 2x = \boxed{コ}\sin\left(2x - \frac{\pi}{\boxed{サ}}\right)$$

ここで

$$-\frac{\pi}{\boxed{サ}} \leqq 2x - \frac{\pi}{\boxed{サ}} \leqq \frac{\boxed{シ}}{\boxed{サ}}\pi$$

であることに注意すると、関数 y の最大値は $\boxed{コ}$、最小値は $-\boxed{ス}$ である。

２ページ目に続く

(4) 赤玉１個、青玉２個、白玉４個がある。これら全部を１列に並べる並べ方は $\boxed{セ}$ 通りであり、円形に並べる並べ方は $\boxed{ソ}$ 通りである。

(5) △OAB において、辺AB を２：３の比に内分する点をC、辺OB の中点をD とし、線分OC と線分AD の交点を P とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$、$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。

(5.1) 点 P は直線 OC 上の点であるから、点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\boxed{タ}$ の形に書ける。また、点 P は直線 AD 上の点であるから $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\boxed{チ}$ の形に書ける。

[空欄 “タ”、“チ” の選択肢]

[1]

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\,\vec{a}+t\,\vec{b}$$

[2]

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\,\vec{a}+\frac{t}{2}\,\vec{b}$$

[3]

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2s}{5}\,\vec{a}+\frac{3s}{5}\,\vec{b}$$

[4]

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3s}{5}\,\vec{a}+\frac{2s}{5}\,\vec{b}$$

(5.2) $\vec{a}$、$\vec{b}$ は線形独立であるから、前問(5.1)において

$$t=\frac{4}{\boxed{ツ}}$$

したがって、AP : PD = 4 : $\boxed{テ}$ である。

(6) 曲面 $z=y^2-x^2$ 上の $x=1$、$y=2$ に対応する点における接平面の方程式は、

$\boxed{ト}\,x-\boxed{ナ}\,y+z+\boxed{ニ}=0$ である。

３ページ目に続く

$\boxed{2}$ (14 点)

行列 $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ で表される線形変換 f によって自分自身に移されるような、$y = mx + n$ の形の直線をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ (14 点)

以下の問いに答えよ。

(1) 次の関数の極値を求めよ。

$$y = \frac{\log x}{x^2}$$

(2) (1)の関数のグラフと直線 $y = k$ の共有点を考え、方程式 $\log x = kx^2$ の実数解の個数が定数 k の値によってどのように変化するかを調べよ。

$\boxed{4}$ (14 点)

以下の問いに答えよ。

(1) 等式

$$f(x) = x + \int_0^{\pi} f(t)\,\sin t\ dt$$

を満たす関数 $f(x)$ を、

$$\int_0^{\pi} f(t)\,\sin t\ dt = c$$

とおくことにより求めよ。

(2) 微分積分法の基本定理を用いて、等式

$$\int_1^{x^2} f(t)\,dt = \log x \qquad (x > 0)$$

を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

4ページ目に続く

以下の$\boxed{5}$、$\boxed{6}$から1問を選択して答えよ。選択した問題番号を解答用紙の指示された箇所に必ず明記すること。

$\boxed{5}$ (14点)

関数 $x(t)$ についての微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2 + x^2}{2tx}$$

は同次形である。以下の問いに答えよ。

(1) $x = tu$ とおくとき、関数 u についての微分方程式を導け。

(2) 一般解を求めよ。

$\boxed{6}$ (14点)

関数 $f(x)$ のフーリエ変換を

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iux}\, dx$$

と定める。ただし、i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ。

(2) 反転公式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{ixu}\, du$$

を用いて、次の等式を証明せよ。

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos xu}{1 + u^2}\, du = e^{-|x|}$$

問題は以上である