令和４年度専攻科入学者選抜学力検査問題

数　学

（ 検査時間　13：00 ～ 14：30 ）

（ 注　意 ）

1　配付物は、問題用紙・解答用紙・草案用紙である。
2　問題用紙は合図があるまで開かないこと。
3　問題用紙は１ページから５ページまでである。
　検査開始の合図のあとで確認すること。
4　解答用紙は１枚ある。
5　問題用紙・草案用紙は検査終了後持ち帰ること。

仙台高等専門学校　生産システムデザイン工学専攻

仙台高等専門学校　令和 4 年度専攻科入学者選抜学力検査問題
（生産システムデザイン工学専攻）

試験科目	数学

1 (40 点)

以下の文章の空欄にあてはまる数や記号を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(1) 未知数 x に関する 2 次方程式

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

の解を $x = \alpha, \beta$ (ただし $\alpha < \beta$) とおくとき,

β の値は $\boxed{\text{ア}}$ である. また, 連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geqq 0 \\ x^2 - 2x \leqq 0 \end{cases}$$

の解は

$$\boxed{\text{ア}} \leqq x \leqq \boxed{\text{イ}}$$

である.

(2) 複素数

$$z = -1 + \sqrt{3}i$$

について考える.

(2.1) 等式

$$z^2 + \boxed{\text{ウ}}\, z + 4 = 0$$

が成り立つ.

(2.2) この複素数 z を

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

(ただし $r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$) の形に表すとき,

$$r = \boxed{\text{エ}}, \quad \theta = \frac{2\pi}{\boxed{\text{オ}}}$$

である.

2 ページ目に続く

(3) 等式

$$2^2 \times 2^3 = 2^p, \qquad (2^2)^3 = 2^q$$

が成り立つとき,

$$p = \boxed{\text{カ}}, \quad q = \boxed{\text{キ}}$$

である. また,

$$2^8 = \boxed{\text{ク}}$$

である. 2^n が 3 桁になる最小の自然数 n は $\boxed{\text{ケ}}$ である.

$n = \boxed{\text{ケ}}$ のとき,

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = \boxed{\text{コ}}$$

である.

(4) 常用対数表には $1 \leqq x < 10$ をみたす x に対し $\log_{10} x$ の近似値が記載されている.

(4.1) $\log_{10} 1 = \boxed{\text{サ}}$ および $\log_{10} 10 = \boxed{\text{シ}}$ が成り立つ.

(4.2) $a = \log_{10} 2$ とおくとき, 等式

$$\log_{10} 20 = \boxed{\text{ス}}, \quad \log_{10} \frac{1}{5} = \boxed{\text{セ}}, \quad \log_{10} 5 = \boxed{\text{ソ}},$$

が成り立つ (下記の選択肢の番号で解答せよ).

[空欄 ス, セ, ソ の選択肢]

[1] $10a$ **[2]** $10 + a$ **[3]** $1 + a$ **[4]** $\dfrac{10}{a}$ **[5]** $\dfrac{1}{a}$ **[6]** $1 - a$ **[7]** $a - 1$

(5) 三角関数表には $0° \leqq \theta \leqq 90°$ をみたす角 θ に対し, $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の近似値が記載されている.

(5.1) $\sin 0° = \boxed{\text{タ}}$ および $\sin 90° = \boxed{\text{チ}}$ が成り立つ.

(5.2) 以下の文章が正しいときは ○, 間違っているときは × を, それぞれ解答用紙の所定欄に記入せよ.

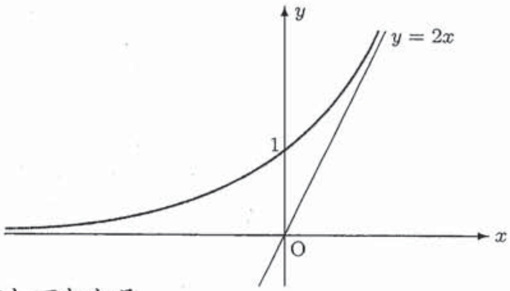
$\boxed{\text{ツ}}$ $90° < \theta \leqq 180°$ のとき $\cos\theta = -\sin(\theta - 90°)$

$\boxed{\text{テ}}$ すべての角 θ に対し $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$

$\boxed{\text{ト}}$ $\sin\theta \neq 0$ である角 θ に対し $\tan\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

3 ページ目に続く

$\boxed{\mathbf{2}}$ (20 点)



座標平面における曲線

$$y = x + \sqrt{x^2+1} \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

は右図のような概形であり，
x 軸と直線 $y = 2x$ が漸近線になっている．

この曲線が双曲線の一部であることが，以下のようにしてわかる．

(1) 方程式 $(*)$ を $y - x = \sqrt{x^2+1}$ と変形して両辺を 2 乗すると，

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

と整理できる．ただし A は

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{ウ}} \end{pmatrix}$$ (空欄 ア, イ, ウ には整数を記入)

で定まる 2 次の対称行列である．

(2) 行列 A は異なる実数の固有値

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{エ}} - \sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{2} \quad \text{および} \quad \beta = \frac{\boxed{\text{エ}} + \sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{2}$$ をもつ．

(空欄 エ, オ には正の整数を記入)

(3) α, β を上記の実数として，ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ を

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

で定義する．このとき，$\boldsymbol{p}$ は固有値 $\boxed{\text{カ}}$ の固有ベクトルになっている．また，

$\boldsymbol{q}$ は固有値 $\boxed{\text{キ}}$ の固有ベクトルになっている．

(空欄 カ, キ には文字 α, β のいずれかを記入)

ベクトルの内積 $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}$ の値は $\boxed{\text{ク}}$ である．

(4) 原点を通り $\boldsymbol{p}$ を方向ベクトルとする直線を L_1 とおき，
原点を通り $\boldsymbol{q}$ を方向ベクトルとする直線を L_2 とおく．このとき，

直線 $y = 2x$ と x 軸のなす鋭角の二等分線は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，

直線 $y = 2x$ と x 軸のなす鈍角の二等分線は $\boxed{\text{コ}}$ である．

(空欄 ケ, コ には記号 L_1 または L_2 を記入).

4 ページ目に続く

$\boxed{3}$ (20 点)

(1) 座標空間において,

- 点 P $\left(3,\ 4,\ \boxed{\text{ア}}\right)$ は曲面 $z = x^2 + y^2$ 上にある.
- 点 Q $\left(3,\ 4,\ \boxed{\text{イ}}\right)$ は曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 上にある.

(2) 点 P における曲面 $z = x^2 + y^2$ の接平面の方程式は

$$z = \boxed{\text{ウ}}\,x + \boxed{\text{エ}}\,y - \boxed{\text{ア}}$$

である. また, 点 Q における曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ の接平面の方程式は

$$\boxed{\text{オ}}\,x + \boxed{\text{カ}}\,y - \boxed{\text{イ}}\,z = 0$$

と表すことができる.

(3) 平面 $\boxed{\text{オ}}\,x + \boxed{\text{カ}}\,y - \boxed{\text{イ}}\,z = 0$ と xy 平面のなす鋭角は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{キ}}}$ ラジアンである.

(4) a を正の定数として, 不等式 $x^2 + y^2 \leqq a^2$ で表される xy 平面の領域を D とおく.
実数 v, w を二重積分

$$v = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\ dxdy, \qquad w = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\ dxdy$$

として定義する.

(4.1) これらの二重積分 v, w を極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ で計算しよう.
このとき, v は定積分 $\boxed{\text{ク}}$ に変形される (下記の選択肢の番号で答えよ).

[空欄 ク の選択肢]

[1] $\displaystyle\int_0^a 2\pi r\ dr$ [2] $\displaystyle\int_0^a 2\pi r^2\ dr$ [3] $\displaystyle\int_0^a 2\pi r^3\ dr$ [4] $\displaystyle\int_0^a 2\pi r^4\ dr$

(4.2) 等式 $v = w$ が成り立つのは $a = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ のときである.
(既約分数で答えよ)

5 ページ目に続く

$\boxed{4}$ (14 点)

この問題では関数の変数を t で表す.

(1) 下記の選択肢に与えられた微分方程式について,

(1.1) 関数 $x = \sin t$ がみたす微分方程式は $\boxed{\text{ア}}$ である.

(1.2) 関数 $x = \dfrac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$ がみたす微分方程式は $\boxed{\text{イ}}$ である.

(1.3) 関数 $x = e^t \sin t$ がみたす微分方程式は $\boxed{\text{ウ}}$ である.

[空欄 ア, イ, ウ の選択肢]

[1] $x'' - 3x' + 2x = 0$	**[2]** $x'' - 2x' + 2x = 0$	**[3]** $x'' - 2x' + x = 0$
[4] $x'' + x = 0$	**[5]** $x'' - x = 0$	**[6]** $x'' - 2x = 0$

(2) 関数 $x = x(t)$ が微分方程式

$$x'' + x = t^2$$

および初期条件

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 2$$

をみたしているとき,

$$x = x(t) = t^2 - \boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\,\sin\left(t + \frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}}\right)$$

である.

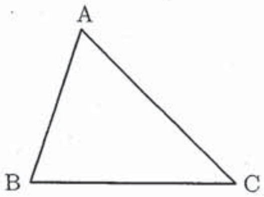
$\boxed{5}$ (6 点)

三平方の定理と三角比の定義を既知として,
鋭角三角形 ABC に対する余弦定理

$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C = c^2$$

(ただし $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{CA}$, $c = \mathrm{AB}$)

を証明せよ.



問題は以上である