

令和5年度専攻科入学者選抜学力検査問題

# 数 学

(検査時間 10:50～12:20)

(注 意)

- 1 配付物は、問題用紙・解答用紙・計算用紙である。
- 2 問題用紙は合図があるまで開かないこと。
- 3 問題用紙は2ページである。  
検査開始の合図のあとで落丁などがいないか確認すること。
- 4 解答用紙は1枚である。
- 5 解答欄には、答えのみ記入すること。
- 6 問題用紙・計算用紙は検査終了後持ち帰ること。

検査科目	数学
------	----

- 解答用紙の解答欄には答え（結果）のみ記入すること。
- 問題文中の  $\pi$  は円周率， $e$  は自然対数の底を表す。また， $(r, \theta)$  は極座標を表す。

問題 1 以下の問いに答えよ。

- (1) 定数  $A, B, C$  が次の  $x$  の恒等式を満たすとき，和  $A + B + C$  の値を求めよ。

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

- (2) 方程式  $\sqrt{x} = x - 6$  を解け。
- (3) 2次不等式  $9x^2 - 6x + 2 > 0$  を解け。
- (4) 楕円  $4x^2 + 2y^2 - 24x + 4y + 37 = 0$  の中心の座標を求めよ。
- (5)  $xy$  平面上で，次の方程式で表される曲線と  $y$  軸との交点の  $y$  座標を全て求めよ。  
 $r = \cos^2 \theta + 1$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ )
- (6) 次の4つの数の中で，最大のものを答えよ。  $\frac{\log_3 26}{2}$ ,  $\frac{1}{\log_5 3}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\log_\pi e$
- (7) 定積分  $\int_0^1 \frac{9}{\sqrt{3x+1}} dx$  の値を求めよ。
- (8) 第45項が 922 で第100項が 2022 であるような等差数列の公差を求めよ。

問題 2  $f(x) = 2x^5 + 5x^3 + 15x$  とする。このとき，以下の問いに答えよ。

ただし， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{15 \tan x - f(x)}{x^5} = 0$  で， $\tan x$  ( $|x| < \frac{\pi}{2}$ ) はマクローリン展開が可能である。

- (1)  $\tan x$  について， $x = 0$  における3次の微分係数  $\left( \frac{d^3 \tan x}{dx^3} \right)_{x=0}$  を求めよ。
- (2) 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x - x^3 - 3x}{x^6 + 4x^5}$  を求めよ。
- (3)  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  のとき，2重積分  $\iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$  を求めよ。

検査科目	数学
------	----

問題 3 次の行列  $A$ ,  $B$ , 及び集合  $V_{31}$  を考えるとき, 以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 62 & 31 & 0 \\ 31 & 93 & 31 \\ 0 & 31 & 62 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 31 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & 0 \\ 0 & 0 & 31 \end{pmatrix},$$

$$V_{31} = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{v} = 31\vec{v} \text{ かつ } |\vec{v}| = \sqrt{3} \} \quad (\mathbb{R}^3 : \text{実 3 次元列ベクトルの全体集合})$$

- (1)  $A$  と  $B^{-1}$  の積  $AB^{-1}$  について, その行列式  $|AB^{-1}|$  の値を求めよ。
- (2)  $A$  の固有値を全て求めよ。
- (3) 集合  $V_{31}$  の要素を 1 つ選び, その転置  $\vec{v}^T$  を成分表示で答えよ。

問題 4 関数  $x(t)$  の微分方程式について, 以下の問いに答えよ。

ただし,  $x'(t)$ ,  $x''(t)$  は, それぞれ第 1 次及び第 2 次導関数である。

- (1)  $(t^2 - 2t + 2)x'(t) = 1$ ,  $x(1) = 0$  のとき,  $x(t)$  を求めよ。
- (2)  $x'(t) - 4x(t) = 4$ ,  $x(0) = 4$  のとき,  $x(t)$  を求めよ。
- (3)  $x''(t) - 4x(t) = 0$ ,  $x(0) = x'(0) = 4$  のとき,  $x(t)$  を求めよ。

問題 5 周期  $\pi$  の関数  $\cos^{2p} x$  ( $p$  は正の整数) について, フーリエ級数の形式で次の展開を考える。

$$\cos^{2p} x = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2nx) + b_n \sin(2nx)]$$

このとき, 以下の問いに答えよ。なお, 展開には一意性があり, 必要ならこれを用いてよい。

- (1)  $p = 1$  のとき,  $c_0$  の値を求めよ。
- (2)  $p = 2$  のとき,  $a_2$  の値を求めよ。
- (3)  $p = 4$  のとき,  $c_0 = \frac{35}{128}$  である。このとき, 和  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  を求めよ。