令和５年度専攻科入学者選抜学力検査問題

数　　学

（ 検査時間　13：00 ～ 14：30 ）

（ 注　意 ）

1　配付物は、問題用紙・解答用紙・草案用紙である。
2　問題用紙は合図があるまで開かないこと。
3　問題用紙は１ページから６ページまでである。
　検査開始の合図のあとで確認すること。
4　解答用紙は１枚ある。
5　問題用紙・草案用紙は検査終了後持ち帰ること。

仙台高等専門学校　生産システムデザイン工学専攻

令和 5 年度仙台高等専門学校専攻科 (生産システムデザイン工学専攻) 入学者選抜学力検査問題

試験科目	数学

$\boxed{1}$ (40 点)

以下の文章の空欄にあてはまる数や選択肢の番号を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(1) 文字 x についての整式を考える.

(1.1) 積 $(x-1)(x^2+x+1)$ を展開した結果は $\boxed{ア}$ である.

(1.2) 積 $(x-1)(x^2-x+1)$ を展開した結果は $\boxed{イ}$ である.

空欄 ア, イ の選択肢

[1] x^3+1 [2] x^3-1 [3] x^3+2x^2+2x+1 [4] x^3-2x^2+2x-1

(2) 複素数 z を

$$z = 1+i$$

と定める.

(2.1) z^2 を $a+bi$ (a, b は実数) の形に表すとき,

$$a = \boxed{ウ}, b = \boxed{エ}$$

である.

(2.2) z^4 は負の実数であり, その絶対値は $\boxed{オ}$ である.

(2.3) z^n が正の実数になるような最小の自然数 n は $\boxed{カ}$ である.

(3) α, β を実数とし, 平面ベクトル

$$\vec{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha), \quad \vec{b} = (\cos\beta, \sin\beta),$$

について考える.

(3.1) ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の大きさはともに $\boxed{キ}$ である.

(3.2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\boxed{ク}$ である.

空欄 ク の選択肢

[1] $\cos(\alpha+\beta)$ [2] $\sin(\alpha+\beta)$ [3] $\cos(\alpha-\beta)$ [4] $\sin(\alpha-\beta)$

(3.3) $-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha, \beta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき, ベクトル $\vec{a}+\vec{b}$ の大きさは $\boxed{ケ}$ である.

空欄 ケ の選択肢

[1] $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ [2] $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ [3] $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ [4] $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

[5] $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ [6] $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ [7] $2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ [8] $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

(4) 関数

$$y = x^3 - 3x + 1$$

について考える．この関数のグラフを曲線 C と呼ぶことにする．

(4.1) この関数は $x = \boxed{\text{コ}}$ のとき極大値 3 をとり，

$x = \boxed{\text{サ}}$ のとき極小値 -1 をとる．

(4.2) 直線 $y = 3$ と曲線 C は点 $\left(\boxed{\text{コ}},\ 3\right)$ で接し，点 $\left(\boxed{\text{シ}},\ 3\right)$ で交わる．

直線 $y = -1$ と曲線 C は点 $\left(\boxed{\text{サ}},\ -1\right)$ で接し，点 $\left(\boxed{\text{ス}},\ -1\right)$ で交わる．

(5) 関数

$$y = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

について考える．

(5.1) この関数を微分すると $y' = \boxed{\text{セ}}$ となる．

空欄 セ の選択肢

[1] $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$　[2] $\sqrt{x^2+1}$　[3] $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　[4] $\dfrac{1}{x^2+1}$

(5.2) この関数の逆関数を求めると $y = \boxed{\text{ソ}}$ となる．

空欄 ソ の選択肢

[1] $\dfrac{1}{\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$　[2] $e^{x+\sqrt{x^2+1}}$　[3] $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　[4] $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

(6) 3 次対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とベクトル $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ について考える．

(6.1) $\mathbf{u}$ は固有値 $\boxed{\text{タ}}$ に対する A の固有ベクトルである．

(6.2) $\mathbf{u}$ に直交するベクトルはすべて，固有値 $\boxed{\text{チ}}$ に対する A の固有ベクトルである．

例えば，$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ツ}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ および $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{テ}} \\ \boxed{\text{ト}} \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 $\boxed{\text{チ}}$ の固有ベクトル

であり，三本のベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ のどの二本も直交する．

$\boxed{2}$ (20 点)

座標空間における二つの平面

$$\alpha \;:\; x+2y+3z=1$$

$$\beta \;:\; 4x+5y+6z=1$$

を考える. 平面 α と平面 β はある直線 ℓ を共有する.

(1) 直線 ℓ は点 $\left(\boxed{ア}, \boxed{イ}, 0\right)$ を通り,

ベクトル $\left(\boxed{ウ}, \boxed{エ}, 1\right)$ に平行である.

(解答欄 ア～エ には整数 (0, ±1, ±2, ⋯) を記入せよ.)

(2) 平面 $ax+by+cz=1$ が直線 ℓ を含むとき,

$$\boxed{ア}\,a+\boxed{イ}\,b=1 \quad かつ \quad c=\boxed{\;オ\;}$$

が成り立つ. ただし, 解答欄 オ には a, b の文字式を記入せよ.

$\boxed{3}$ (20 点)

座標空間の動点 P があり, 時刻 t での位置は

$$\mathrm{P}\,(\cos t,\ \sin t,\ t),$$

である. P を通り z 軸に垂直な直線が時間 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ において動いた軌跡を考える. この軌跡から z 軸上の点を取り除いて得られる曲面を S と呼ぶ.

(1) 曲面 S の方程式は $\boxed{\text{ア}}$ である.

空欄 ア の選択肢

[1] $z = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$　　[2] $z = \tan^{-1}\frac{y}{x}$　　[3] $z = \tan^{-1}\frac{x}{y}$

(2) 偏導関数について, $z_x = \boxed{\text{イ}}$ および $z_y = \boxed{\text{ウ}}$ が成り立つ.

空欄 イ, ウ の選択肢

[1] $\frac{x}{x^2+y^2}$　　[2] $\frac{-x}{x^2+y^2}$　　[3] $\frac{y}{x^2+y^2}$　　[4] $\frac{-y}{x^2+y^2}$

(3) 不等式

$$x^2 + y^2 \leqq 1,\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0$$

で表される領域を D とおく. また, 定積分 $\int_0^1 \sqrt{r^2+1}\,dr$ の値として実数 a を定める.

このとき, 二重積分 $\iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy$ の値は $\boxed{\text{エ}}$ に等しい.

空欄 エ の選択肢

[1] πa　　[2] $\frac{\pi a}{2}$　　[3] $\frac{\pi a}{3}$　　[4] $\frac{\pi a}{4}$

(4) 以下の定積分のうち, 値が a と等しいのは $\boxed{\text{オ}}$ である.

空欄 オ の選択肢

[1] $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos\theta}$　　[2] $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$　　[3] $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^3\theta}$　　[4] $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^4\theta}$

$\boxed{4}$ (12点)

空中の粒子について考え, その質量を m とおく.
粒子に働く力は, 鉛直下方向を正の向きとして

- 重力 mg
- 抵抗力 $-Kv$

である. ただし, g は重力加速度, v は粒子の速度, K はある正の定数である.
速度 v は時刻 t の関数で, 導関数 $v' = \dfrac{dv}{dt}$ が加速度である.
したがって, 運動方程式より

$$mv' = mg - Kv$$

である. この両辺を m で割って, 定数 $\dfrac{K}{m}$ を改めて k と書き, v の項を左辺に移項する.
この結果, 粒子の速度 v についての微分方程式

$$\boldsymbol{v' + kv = g} \quad \cdots\cdots\cdots \ (*)$$

が得られる. 以下, $t=0$ のとき $v=0$ であると仮定する.

(1) 微分方程式

$$v' + kv = 0$$

の一般解は, 任意定数 C を用いて $\boxed{ア}$ と表される.

空欄 ア の選択肢

[1] $v = Ce^{-kt}$　[2] $v = \log(-kt + C)$　[3] $v = k\log t + C$

(2) 微分方程式 $(*)$ の解は, 問 (1) における C を t の関数と見ることで予想される.
v の式として正しいものは, 以下の $\boxed{イ}$ である：

空欄 イ の選択肢

[1] $v = \left(1 - \dfrac{g}{k}\right)e^{-kt}$　[2] $v = \dfrac{g}{k}(1 - e^{-kt})$　[3] $v = 1 - e^{kt}$

(3) 十分に長い時間が経過した後の粒子の様子について,
最も適切な説明は以下の $\boxed{ウ}$ である.

空欄 ウ の選択肢

[1] 空中に静止する　[2] ほぼ等速になる　[3] 急激に上昇する

5 (8点)

座標空間において, 点 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$ と平面 α: $ax+by+cz=d$ が与えられていたとする. 点 P から平面 α に垂線を下ろし, 交点を H とする. このとき, 線分の長さについて

$$\mathrm{PH}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

が成り立つことを証明せよ.

ただし, $\overrightarrow{n}=(a,\ b,\ c)$ で定められるベクトル $\overrightarrow{n}$ は零ベクトルではなく, このベクトル $\overrightarrow{n}$ が平面 α に垂直であることは既知としてよい.

問題は以上である