令和６年度専攻科入学者選抜学力検査問題

数　　学

（ 検査時間　13：00 ～ 14：30 ）

（ 注　意 ）

1　配付物は、問題用紙・解答用紙・草案用紙である。
2　問題用紙は合図があるまで開かないこと。
3　問題用紙は１ページから６ページまでである。
　 検査開始の合図のあとで確認すること。
4　解答用紙は１枚である。
5　問題用紙・草案用紙は検査終了後持ち帰ること。

仙台高等専門学校　生産システムデザイン工学専攻

令和 6 年度仙台高等専門学校専攻科 (生産システムデザイン工学専攻) 入学者選抜学力検査問題

試験科目	数学

$\boxed{1}$ (40 点)

以下の文章の空欄にあてはまる数や記号を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(1) 複素数 z および w を

$$z = 2 + i, \qquad w = 3 + i$$

と定める.

(1.1) 複素数の積 zw を計算すると $\boxed{ア} + \boxed{イ}\, i$ となる.

(1.2) 複素数 z の絶対値 $|z|$ は $\sqrt{\boxed{ウ}}$ であり,

複素数 w の絶対値 $|w|$ は $\sqrt{\boxed{エ}}$ である.

(1.3) 実数 α, β を

$$z = \sqrt{\boxed{ウ}}\,(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad w = \sqrt{\boxed{エ}}\,(\cos\beta + i\sin\beta)$$
$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \qquad\qquad 0 < \beta < \frac{\pi}{2},$$

となるように定めるとき, $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{\boxed{オ}}$ である.

(2) 関数 $y = \dfrac{2x-5}{x-1}$ について考える.

(2.1) $x = \boxed{カ}$ のとき y は定義されない.

(2.2) 極限値 $\lim\limits_{x\to\infty} y$ は $\boxed{キ}$ である.

(2.3) この関数を微分すると $y' = \dfrac{\boxed{ク}}{(x-1)^2}$ となる.

(2.4) 関数 $y = \dfrac{2x-5}{x-1}$ のグラフは点 $\left(\boxed{ケ}, \boxed{コ}\right)$ に関して点対称な図形である.

2 ページ目に続く

(3) 実数全体を定義域とする以下の関数 $f(x)$, $g(x)$ について考える.

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(3.1) 実数 x が何であっても $f(-x) = \boxed{サ}$ が成り立つ.

(3.2) 実数 x が何であっても $g(-x) = \boxed{シ}$ が成り立つ.

(3.3) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は関数 $\boxed{ス}$ に一致する.

(3.4) 関数 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ は関数 $\boxed{セ}$ に一致する.

空欄 サ 〜 セ の選択肢 (重複可)

[1] $f(x)$ [2] $-f(x)$ [3] $g(x)$ [4] $-g(x)$

(3.5) 実数 x が何であっても $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2$ は一定の値 $\boxed{ソ}$ である.

(3.6) 実数 α, β が何であっても $f(\alpha + \beta) = \boxed{タ}$ が成り立つ.

(3.7) 実数 α, β が何であっても $g(\alpha + \beta) = \boxed{チ}$ が成り立つ.

空欄 タ, チ の選択肢 (重複不可)

[1] $f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta)$ [2] $f(\alpha)f(\beta) - g(\alpha)g(\beta)$
[3] $f(\alpha)g(\beta) + f(\beta)g(\alpha)$ [4] $f(\alpha)g(\beta) - f(\beta)g(\alpha)$

(4) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のうち,

(4.1) 原点のまわりの 90° 回転を表す行列は $\boxed{ツ}$ である.

(4.2) x 軸に関する対称移動を表す行列は $\boxed{テ}$ である.

(4.3) 直線 $y = x$ に関する対称移動を表す行列は $\boxed{ト}$ である.

[注] 空欄 ツ, テ, ト には文字 A, B, C, D のどれかを記入すること (重複不可).

$\boxed{2}$ (20 点)

r を正の定数とする.

(1) 以下の定積分のうち,

(1.1) 半径 r の円の面積を表すものは $\boxed{ア}$ である.

(1.2) 半径 r の球の体積を表すものは $\boxed{イ}$ である.

空欄 ア, イ の選択肢 (重複不可)

[1] $\int_{-r}^{r}\sqrt{x^2-r^2}\,dx$	[2] $\int_{-r}^{r}2\sqrt{x^2-r^2}\,dx$	[3] $\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2+x^2}\,dx$
[4] $\int_{-r}^{r}2\sqrt{r^2+x^2}\,dx$	[5] $\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$	[6] $\int_{-r}^{r}2\sqrt{r^2-x^2}\,dx$
[7] $\int_{-r}^{r}(x^2-r^2)\,dx$	[8] $\int_{-r}^{r}\pi(x^2-r^2)\,dx$	[9] $\int_{-r}^{r}(r^2+x^2)\,dx$
[10] $\int_{-r}^{r}\pi(r^2+x^2)\,dx$	[11] $\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx$	[12] $\int_{-r}^{r}\pi(r^2-x^2)\,dx$

(2) 数 D を定積分 $\int_{0}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^3 dx$ として定める.

(2.1) 変数変換 $x=r\sin\theta$ による置換積分から等式 $D=r^m\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^n\ d\theta$ が導かれる.
ただし, $m=\boxed{ウ}$, $n=\boxed{エ}$ である (空欄 ウ, エ には自然数が入る).

(2.2) $I_k=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^k\ d\theta$ とおいて得られる数列 $I_0, I_1, I_2, \ldots$ は初期条件 $I_0=\frac{\pi}{2}$, $I_1=1$
および漸化式 $I_{k+2}=\frac{k+1}{k+2}I_k\ (k=0,1,2,\ldots)$ をみたす. この事実を用いると,
数 D が上記自然数 $m=\boxed{ウ}$ とある有理数 q を用いて等式

$$D=q\pi r^m$$

で表されることがわかる.
この等式にあてはまる有理数は $q=\boxed{オ}$ である.

$\boxed{3}$ (20 点)

(1) 2 次正方行列 A と 2 変数関数 $\varphi(h,k)$ を

$$A=\begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}, \qquad \varphi(h,k)=ph^2+2qhk+rk^2$$

と定める. ただし, p, q, r は実数の定数で h, k は変数である.
また, 正方行列 A の固有値を α, β とおく.

(1.1) 不等式 $pr-q^2>0$ が成り立つとする. 以下の文章のうち, 正しいものは $\boxed{ア}$ である.

空欄 ア の選択肢

[1] p, r の一方は正の数で, もう一方は負の数である.
[2] p, r の一方は 0 で, もう一方は正の数である.
[3] p, r の一方は 0 で, もう一方は負の数である.
[4] p, r はともに正の数, またはともに負の数である.

(1.2) 不等式 $p>0$ および $pr-q^2>0$ が成り立つとする.
以下の文章のうち, 正しいものは $\boxed{イ}$ である.

空欄 イ の選択肢

[1] α, β のうち一方は正で, もう一方は負である.
[2] α も β も正である.　　[3] α も β も負である.

(1.3) A は 2 次対称行列なので回転行列 R を適切に定めると A は ${}^tRAR=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ と対角化される. 以下の文章のうち, 正しいものは $\boxed{ウ}$ である.

空欄 ウ の選択肢

[1] 変数変換 $(h,k)\to(h',k')$ を行列の等式 $R\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix}$ で定めると,
関数 $\varphi(h,k)$ は $\alpha(h')^2+\beta(k')^2$ という形に変形される.

[2] 変数変換 $(h,k)\to(h',k')$ を行列の等式 ${}^tR\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix}$ で定めると,
関数 $\varphi(h,k)$ は $\alpha(h')^2+\beta(k')^2$ という形に変形される.

(1.4) 不等式 $p>0$ および $pr-q^2>0$ がみたされているものとする.
関数 $\varphi(h,k)$ について述べた以下の文章のうち, 正しいものは $\boxed{エ}$ である.

空欄 エ の選択肢

[1] $(0,0)$ 以外のすべての (h,k) に対し不等式 $\varphi(h,k)>0$ が 成り立つ.
[2] $(0,0)$ 以外のすべての (h,k) に対し不等式 $\varphi(h,k)<0$ が 成り立つ.

5 ページ目に続く

(2) 2 変数関数 $f(x,y)$ がある点 (a,b) のまわりで 2 次までの偏導関数をもち，
1 次偏導関数 f_x および f_y の点 (a,b) での値が 0 であったとする．
2 次偏導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} の点 (a,b) での値を順に p, q, r とおいて，問 (1) のように
2 変数関数 $\varphi(h,k)$ をつくると，

$$\Phi(h,k) = f(a,b) + \frac{1}{2}\varphi(h,k)$$

で定義される関数 $\Phi(h,k)$ が変数 h, k の二変数関数 $f(a+h,\ b+k)$ の点 (a,b) のまわりでの 2 次近似式になることが知られている．

いま，(h,k) を $(0,0)$ の近くに限定したとき，不等式 $\varphi(h,k) > 0$ が $(0,0)$ 以外のすべての (h,k) で成り立っていたとする．以下の文章のうち，正しいものは $\boxed{\text{オ}}$ である．

空欄 オ の選択肢

[1] 関数 $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ において極大となる．
[2] 関数 $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ において極小となる．

$\boxed{4}$ (12 点)

この問題では関数の変数を t で表す．

(1) 微分方程式

$$x'' + x' - 2x = 0$$

の解として，関数 $x = e^{\alpha t}$ および $x = e^{\beta t}$ (ただし $\alpha > \beta$) がとれる．

このとき，$\beta = \boxed{\text{ア}}$ である．

(2) 微分方程式

$$x'' + x' - 2x = 10\cos t \qquad \cdots\cdot\ (*)$$

について考える．

(2.1) 微分方程式 $(*)$ の解は定数 A, B, C_1, C_2 を用いて

$$x = A\sin t + B\cos t + C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$$

という形に表すことができる．ここにおいて定数 C_1 と C_2 は任意だが，
A と B の値は適切に選ばれる必要がある．

たとえば，$B = \boxed{\text{イ}}$ でなくてはならない．

(2.2) 初期条件 $x(0)=0$, $x'(0)=1$ をみたす解は，定数 C_1, C_2 を

$$C_1 = \boxed{\text{ウ}}, \qquad C_2 = \boxed{\text{エ}}$$

と選ぶことによって与えられる

$\boxed{5}$ (8 点)

等式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdot+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

がすべての自然数 n に対して成り立つことを証明せよ.

問題は以上である