令和７年度専攻科入学者選抜学力検査問題

数　学

（検査時間　13：00 ～ 14：30）

（注　意）

1　配付物は、問題用紙・解答用紙・草案用紙である。
2　問題用紙は合図があるまで開かないこと。
3　問題用紙は１ページから６ページまでである。
　 検査開始の合図のあとで確認すること。
4　解答用紙は１枚である。
5　問題用紙・草案用紙は検査終了後持ち帰ること。

仙台高等専門学校　生産システムデザイン工学専攻

令和 7 年度仙台高等専門学校専攻科 (生産システムデザイン工学専攻) 入学者選抜学力検査問題

試験科目	数学

1 (40 点)

以下の文章の空欄にあてはまる数や選択肢の番号を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(1) $P(x) = x^3 - 1$ で定められる 3 次式 $P(x)$ について,

(1.1) $P(1)$ の値は $\boxed{\text{ア}}$ である.

(1.2) $P(x)$ を $x - 1$ で割った商は $\boxed{\text{イ}}$ である.

(1.3) $P(x) + 2$ を $x + 1$ で割った商は $\boxed{\text{ウ}}$ である.

空欄 イ, ウ の選択肢

[1] $x^2 + x + 1$　[2] $x^2 + x - 1$　[3] $x^2 - x + 1$　[4] $x^2 - x - 1$

(2) $z = 2 + i$ で定められる複素数 z について,

(2.1) 複素数 z^2 を $a + bi$ (a, b は実数) の形に表すとき,
$a = \boxed{\text{エ}}$, $b = \boxed{\text{オ}}$ である.

(2.2) 複素数 z^2 の絶対値は $\boxed{\text{カ}}$ である.

(3) 実数 $\cos\theta$ (ただし $0 < \theta < \pi$) が 2 次方程式

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

の解になっていたとする.

(3.1) $\theta = \dfrac{1}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ である.

(3.2) $\cos(2025\theta)$ の値は $\boxed{\text{ク}}$ である.

(4) 不等式

$$2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 < 0$$

をみたす実数 x の範囲を求めたい.

(4.1) $2^x = t$ と置き換える. このとき, 2^{2x+1} を t で表すと $\boxed{\text{ケ}}$ である.

空欄 ケ の選択肢

[1] $\dfrac{1}{2}t^2$　[2] t^2　[3] $2t^2$　[4] $4t^2$

(4.2) 求める x の範囲は $\boxed{\text{コ}} < x < \boxed{\text{サ}}$ である.

(5) n を自然数とする.

(5.1) 自然数 1 から n までの合計は $\boxed{シ}$ に等しい.

(5.2) n チームで総当たり戦をするとき, 試合の数は $\boxed{ス}$ に等しい.

(5.3) 二択問題が n 題あったとき, 解答パターンの数は $\boxed{セ}$ に等しい.

(5.4) n 人のクラスで席替えをするとき, 席替えパターンの数は $\boxed{ソ}$ に等しい.

空欄 シ 〜 ソ の選択肢

[1] ${}_{n-1}\mathrm{C}_2$　[2] ${}_{n}\mathrm{C}_2$　[3] ${}_{n+1}\mathrm{C}_2$　[4] ${}_{n}\mathrm{P}_2$　[5] 2^n　[6] $n!$

(6) 関数

$$y = x^3 - 3x + 2$$

について考える. この関数のグラフを曲線 C と呼ぶことにする.

(6.1) この関数は $x = \boxed{タ}$ のときに極大値 $\boxed{チ}$ をとり,

$x = \boxed{ツ}$ のとき極小値 $\boxed{テ}$ をとる.

(6.2) 直線 $y = \boxed{チ}$ と曲線 C は点 $\left(\boxed{タ}, \boxed{チ}\right)$ で接し,

点 $\left(\boxed{ト}, \boxed{チ}\right)$ で交わる.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (20 点)

$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ で定められる 2 次正方行列 A について,

(1) 行列 A の固有値は 1 と $\boxed{\text{ア}}$ である.

(2) 固有値 1 の固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{イ}} \end{pmatrix}$ がとれ,

固有値 $\boxed{\text{ア}}$ の固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{ウ}} \end{pmatrix}$ がとれる.

(3) A が表す線形変換を f とおく. f について述べた以下の文章について,
正しいときは ○, 間違っているときは × を, 解答用紙の所定欄に記入せよ.

$\boxed{\text{エ}}$ 原点以外のどんな点 P も, f によって P 以外の点に写される.

$\boxed{\text{オ}}$ 傾きが 1 の直線はすべて, f によって自分自身に写される.

$\boxed{3}$ (20 点)

$x > 0$ で定義された関数

$$y = \frac{\log x}{x}$$

について考える.

(1) $y = 0$ となるのは $x = \boxed{ア}$ のときである.

(2) y の導関数は $\boxed{イ}$ である.

空欄 イ の選択肢

[1] $\dfrac{1}{x^2}$　　[2] $\dfrac{1-\log x}{x^2}$　　[3] $\dfrac{1+\log x}{x^2}$

(3) $x = \boxed{ウ}$ のとき, y は極大となる.

(4) y の原始関数になっている関数は $\boxed{エ}$ である.

空欄 エ の選択肢

[1] $2(\log x)^2$　　[2] $(\log x)^2$　　[3] $\dfrac{1}{2}(\log x)^2$

(5) 自然数 n で $\sqrt[n]{n}$ の値が最も大きくなるのは $n = \boxed{オ}$ のときである.

$\boxed{4}$ (12 点)

この問題では関数の変数を t で表す.
以下の微分方程式について考える.

$$t\frac{dx}{dt} = 4x - 6t \cdots\cdots (*)$$

(1) $\dfrac{x}{t} = u$ とおくと, 関数 u についての微分方程式

$$t\frac{du}{dt} = \boxed{\text{ア}}\, u - 6$$

が導かれる. この微分方程式は変数分離形である.

(2) 微分方程式 $(*)$ の一般解は, 任意定数 C を用いて

$$x = Ct^p \ + \ qt$$

の形に表すことができる. ただし, p, q は

$$p = \boxed{\text{イ}}\,, \quad q = \boxed{\text{ウ}}$$

で与えられる自然数である.

$\boxed{5}$ (8点)

三角形 ABC の辺の長さを $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ とおき, 三角形 ABC の面積を S とおく.
余弦定理

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

および面積の公式

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

を既知として, 以下の等式を導出せよ.

$$16S^2=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

ただし, ヘロンの公式は既知としてはいけない.

問題は以上である