試 験 科 目	数 学

1 (40 点)

以下の文章の空欄にあてはまる数や選択肢の番号を, 解答用紙の所定欄に記入せよ.

(1) 多項式の積 $(x-1)(x^2+x+1)$ を分配法則を使って展開し,

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

の形に整理するとき, a, b, c として当てはまる係数は

$$a = \boxed{\text{ア}}, \quad b = \boxed{\text{イ}}, \quad c = \boxed{\text{ウ}}$$

である.

(2) 分数式の和 $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-1}$ を計算すると

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{\boxed{\text{エ}}\,x + \boxed{\text{オ}}}{x^2 - 1}$$

となる.

(3) a, b は実数で, 少なくとも一方は 0 でないとする.
この問では虚数単位を i で表し, 複素数 $a+bi$ を z で表す.
記号の定め方より $i^2 = -1$ であり, 複素数 z の実部は a である.

(3.1) z の共役複素数 $\overline{z}$ は $a - bi$ である.
複素数の積 $z \cdot \overline{z}$ は実数 $\boxed{\text{カ}}$ に一致する.

(3.2) 複素数 z^2 の実部は $\boxed{\text{キ}}$ である.

(3.3) 複素数 $\dfrac{1}{z}$ の実部は $\boxed{\text{ク}}$ である.

空欄 カ, キ, ク の選択肢

[1] a^2+b^2 **[2]** a^2-b^2 **[3]** $\dfrac{1}{a^2+b^2}$ **[4]** $\dfrac{1}{a^2-b^2}$ **[5]** $\dfrac{a}{a^2+b^2}$ **[6]** $\dfrac{a}{a^2-b^2}$

(4) n を自然数とする.

(4.1) 初項 1, 交比 2 の等比数列の第 n 項は $\boxed{\text{ケ}}$ である.

(4.2) 初項 1, 交比 2 の等比数列の初項から第 n 項までの和は $\boxed{\text{コ}}$ として計算できる.

空欄 ケ, コ の選択肢

[1] 2^n **[2]** $2^n + 1$ **[3]** 2^{n+1} **[4]** 2^{n-1} **[5]** $2^n - 1$

(5) 対数表には $1 \leqq x \leqq 10$ をみたす色々な x に対する $\log_{10} x$ の値の近似値が記載されている. 一般に, $\log_{10} x$ の値が y であれば等式 $x = 10^y$ が成り立つ.

(5.1) $\log_{10} 1$ の値は $\boxed{\text{サ}}$ で, $\log_{10} 10$ の値は $\boxed{\text{シ}}$ である.

(5.2) $\log_{10} 11$ の値は対数表にないが, $\log_{10} 1.1$ について対数表から近似値 0.04 がわかる. この近似値と対数の性質を使うと $\log_{10} 11$ の近似値として $\boxed{\text{ス}}$ を得る.

(5.3) $\log_{10} 0.9$ の値は対数表にないが, $\log_{10} 9$ について対数表から近似値 0.95 がわかる. この近似値と対数の性質を使うと $\log_{10} 0.9$ の近似値として $\boxed{\text{セ}}$ を得る.

(5.4) 問 **(5.3)** の結果と対数の性質から, $\log_{10} 0.81$ の近似値として $\boxed{\text{ソ}}$ を得る.

(6) 三角関数表には $0° \leqq \theta \leqq 90°$ をみたす色々な角 θ に対する正弦・余弦・正接の値の近似値が記載されている.

(6.1) $\sin 0°$ の値は $\boxed{\text{タ}}$ で, $\cos 0°$ の値は $\boxed{\text{チ}}$ である.

(6.2) 三角関数表がもつ性質として, 正しいものは下記の $\boxed{\text{ツ}}$ である.

空欄 ツ の選択肢

[1] $\theta + \theta' = 90°$ をみたす角 θ, θ' に対し $\sin\theta = \cos\theta'$

[2] $\theta + \theta' = 90°$ をみたす角 θ, θ' に対し $\sin\theta = \tan\theta'$

[3] $\theta + \theta' = 90°$ をみたす角 θ, θ' に対し $\cos\theta = \tan\theta'$

角 $100°$ の正弦・余弦の近似値を求めたいとする.

三角関数表から近似値 $\sin 10° = 0.17$, $\cos 10° = 0.98$ はわかる.

これらの近似値と三角関数の性質を利用すると

(6.3) $\sin 100°$ の近似値として $\boxed{\text{テ}}$ が得られる.

(6.4) $\cos 100°$ の近似値として $\boxed{\text{ト}}$ が得られる.

2 (20 点)

e を自然対数の底として, 変数 x の関数

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

について考える.

(1) $x = 0$ のときの関数 y の値は 0 である. 一方,

$x = 0$ のときの導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ の値は $\boxed{\text{ア}}$ である.

(2) 導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を 2 乗すると, y^2 と類似の形になる.

y^2 と $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ の間の関係式として, 正しい等式は $\boxed{\text{イ}}$ である.

空欄 イ の選択肢

[**1**] $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1$　[**2**] $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 = 1$　[**3**] $y^2 - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1$

(3) 等式 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ を e^x について解くと $e^x = \boxed{\text{ウ}}$ となる.

空欄 ウ の選択肢

[**1**] $y + \sqrt{y^2 - 1}$　[**2**] $y - \sqrt{y^2 - 1}$　[**3**] $y + \sqrt{y^2 + 1}$　[**4**] $y - \sqrt{y^2 + 1}$

(4) x を y の関数と見るとき, 導関数 $\dfrac{dx}{dy}$ は $\boxed{\text{エ}}$ である.

空欄 エ の選択肢

[**1**] $\sqrt{y^2 + 1}$　[**2**] $y^2 + 1$　[**3**] $\dfrac{1}{y^2 + 1}$　[**4**] $\dfrac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}$

(5) T をある正の数として, $x = T$ のときの関数 y および $\dfrac{dy}{dx}$ の値を, それぞれ L, H とおく.

定積分 $\displaystyle\int_0^T \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$ の値は $\boxed{\text{オ}}$ である.

空欄 オ の選択肢

[**1**] $LH + T$　[**2**] $2LH + 2T$　[**3**] $\dfrac{1}{2}LH + \dfrac{1}{2}T$　[**4**] $\dfrac{1}{4}LH + \dfrac{1}{4}T$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (20 点)

3 次対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

について考える.

一般に, 零ベクトル以外の 3 次縦ベクトル $\mathbf{u}$ について,
行列の積 $A\mathbf{u}$ を計算した結果が $\mathbf{u}$ の定数倍になったとき,
$\mathbf{u}$ は A の固有ベクトルであり, $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ をみたす定数 λ は A の固有値になっている.

(1) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 $\boxed{\text{ア}}$ に対する A の固有ベクトルである.

(2) 零ベクトル以外のあるベクトル $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が $x + y + z = 0$ をみたしていたとする.

このとき, $\mathbf{u}$ は固有値 $\boxed{\text{イ}}$ に対する A の固有ベクトルである.

(3) 変数 λ を含む行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

は $\left(\lambda - \boxed{\text{ウ}}\right)^2 \left(\lambda - \boxed{\text{エ}}\right)$ と因数分解される.

(4) 行列 P として $\boxed{\text{オ}}$ を選ぶと, 転置行列 ${}^tP$ と行列 A, P の積 ${}^tPAP$ は対角行列になる.

空欄 オ の選択肢

[1] $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ [2] $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ [3] $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$\boxed{4}$ (12 点)

この問題では関数の変数を t で表す.

k と ω は異なる正の定数, p, q は実数の定数であるものとする.
非斉次 2 階微分方程式

$$x'' + \omega^2 x = t\,(p\cos kt + q\sin kt)$$

の特殊解を

$$x = (At + B)\cos kt + (Ct + D)\sin kt$$

の形で探すことにする.
係数 A, B, C, D として $A = \boxed{\text{ア}}$, $B = \boxed{\text{イ}}$, $C = \boxed{\text{ウ}}$, $D = \boxed{\text{エ}}$ が当てはまる.

空欄 ア, イ, ウ, エ の選択肢

[1] $\dfrac{p}{\omega^2 - k^2}$	**[2]** $\dfrac{-p}{\omega^2 - k^2}$	**[3]** $\dfrac{q}{\omega^2 - k^2}$	**[4]** $\dfrac{-q}{\omega^2 - k^2}$
[5] $\dfrac{2kp}{(\omega^2 - k^2)^2}$	**[6]** $\dfrac{-2kp}{(\omega^2 - k^2)^2}$	**[7]** $\dfrac{2kq}{(\omega^2 - k^2)^2}$	**[8]** $\dfrac{-2kq}{(\omega^2 - k^2)^2}$

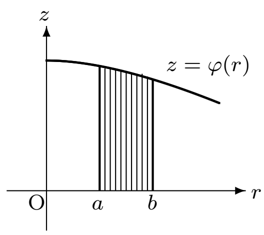
$\boxed{5}$ (8 点)

正の値をとる二変数関数 $f(x, y)$ と, この関数の定義域に含まれる領域 D に対し,
二重積分 $\displaystyle\iint_D f(x, y)\ dxdy$ は, xyz-座標空間における曲面 $z = f(x, y)$, xy 平面の領域 D, および D の境界を通り z 軸に平行な直線で作られる曲面が囲む立体の体積に等しい.

以上の事実は既知として, 以下の事実を証明せよ.

事実 (これを証明する)

正の値をとる一変数関数 $\varphi(r)$ と, この関数の定義域に含まれる
区間 $a \leqq r \leqq b$ (ただし $0 \leqq a < b$ と仮定する) に対し,
不等式 $0 \leqq z \leqq \varphi(r)$, $a \leqq r \leqq b$ が表す rz 座標平面の領域
(右図棒線部) を z 軸のまわりに回転させて得られる立体の体積
は $\displaystyle\int_a^b 2\pi r \cdot \varphi(r)\ dr$ に等しい.



ただし, 証明において二重積分についての上記事実を引用する場合には, 関数 $f(x, y)$ および領域 D としてどのような関数または領域を選んだのかを明記すること.

問題は以上である